

# Física

Fundamentos teórico-prácticos  
de dinámica rotacional  
y movimiento oscilatorio  
para ciencias e ingenierías

Diego Guillermo Barba Maggi  
Bernardo Ezequiel Barba Barba



ESPOCH  
2025

**Física. Fundamentos teórico-prácticos de dinámica rotacional  
y movimiento oscilatorio para ciencias e ingenierías**

---

# **Física. Fundamentos teórico-prácticos de dinámica rotacional y movimiento oscilatorio para ciencias e ingenierías**

---

Diego Guillermo Barba Maggi  
Bernardo Ezequiel Barba Barba



**Decanato  
de Publicaciones**



**esPOCH**

**Física. Fundamentos teórico-prácticos de dinámica rotacional  
y movimiento oscilatorio para ciencias e ingenierías**

© 2025 Diego Guillermo Barba Maggi y Bernardo Ezequiel Barba Barba

© 2025 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½

Decanato de Publicaciones

Riobamba, Ecuador

Teléfono: 593 (03) 2 998-200

Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego

(*peer review*)

Corrección y diseño:

La Caracola Editores

Publicado en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la  
previa autorización por escrito de los propietarios del *Copyright*

CDU: 531

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Decanato de Publicaciones, 2025

177 pp. vol: 17,6 x 25 cm

ISBN: 978-9942-51-515-5

1. Física

2. Dinámica Rotacional

3. Movimiento Oscilatorio

# Dedicatoria

El cuarto tomo de *Física para Ciencias e Ingenierías* está dedicado a todas aquellas personas que cursan estudios en carreras técnicas, así como a profesionales egresados en disciplinas científico-tecnológicas, como un recurso de apoyo en su quehacer profesional en el ámbito de la dinámica rotacional y el movimiento oscilatorio.

Al tratarse de una serie de tomos redactados con un lenguaje claro, científico y accesible, invitamos cordialmente a los lectores a revisar los prólogos e introducciones de los tres volúmenes anteriores, a fin de seguir una secuencia lógica en la adquisición de los contenidos fundamentales:

- **Primer tomo:** *Física. Fundamentos teórico-prácticos para ciencias e ingenierías* ([1]), que presenta las herramientas matemáticas, los sistemas de unidades y los vectores empleados en el estudio de la Física.
- **Segundo tomo:** *Física. Fundamentos teórico-prácticos de cinemática, estática y dinámica para ciencias e ingenierías* ([2]), que aborda los fundamentos teóricos y prácticos del movimiento de las partículas.
- **Tercer tomo:** *Física. Fundamentos teórico-prácticos de trabajo, potencia, energía y cantidad de movimiento lineal para ciencias e ingenierías* ([3]), que complementa el estudio del movimiento mediante técnicas adicionales, útiles tanto para estudiantes como para profesionales técnicos.

Este cuarto tomo brinda herramientas teóricas y prácticas sobre dinámica rotacional y movimiento oscilatorio, fenómenos físicos que se presentan en el macrouniverso, sentando así las bases para el estudio del movimiento ondulatorio, eje fundamental en toda formación técnico-científica.

Esperamos que esta obra sea de gran provecho en su camino académico y profesional.

Diego Guillermo y Bernardo Ezequiel

## ÍNDICE GENERAL

|                                                                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Glosario.....                                                                                                     | 11  |
| Prólogo.....                                                                                                      | 14  |
| Introducción.....                                                                                                 | 15  |
| Capítulo I. Dinámica Rotacional.....                                                                              | 16  |
| 1.1. Rotación de una masa puntual.....                                                                            | 17  |
| 1.2. Rotación de un sistema de masas puntuales (n) alrededor de un eje fijo.....                                  | 20  |
| 1.3. Rotación de un sólido rígido alrededor de un eje fijo.....                                                   | 21  |
| 1.4. Radio de giro (U).....                                                                                       | 25  |
| 1.5. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.....                                                              | 27  |
| 1.6. Trabajo en el movimiento rotacional.....                                                                     | 28  |
| 1.7. Energía cinética rotacional.....                                                                             | 29  |
| 1.8. Energía potencial rotacional.....                                                                            | 30  |
| 1.9. Teorema del trabajo y la energía cinética rotacional.....                                                    | 31  |
| 1.10. Teorema del trabajo y la energía potencial rotacional.....                                                  | 32  |
| 1.11. Conservación de la energía en la rotación.....                                                              | 32  |
| 1.12. Teorema del trabajo y la energía para sistemas en donde<br>existe la traslación y la rotación a la vez..... | 33  |
| 1.13. Cantidad de movimiento angular o momentum angular (L).....                                                  | 33  |
| 1.14. Definición del torque a partir del momentum angular.....                                                    | 34  |
| Capítulo II. Ejercicios propuestos y resueltos de Dinámica Rotacional.....                                        | 36  |
| 2.1. Ejercicios resueltos.....                                                                                    | 36  |
| 2.2. Ejercicios propuestos.....                                                                                   | 86  |
| Capítulo III. Movimiento oscilatorio.....                                                                         | 113 |
| 3.1. Generalidades.....                                                                                           | 123 |
| 3.2. Condiciones.....                                                                                             | 114 |
| 3.2.1. Geometría.....                                                                                             | 114 |
| 3.2.2. Dinámica.....                                                                                              | 114 |
| 3.3. Definiciones.....                                                                                            | 115 |

|                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.3.1. Posición de Equilibrio .....                                                                                  | 115 |
| 3.3.2. Posición ( $x$ ).....                                                                                         | 115 |
| 3.3.3. Amplitud ( $A$ ) .....                                                                                        | 116 |
| 3.3.4. Oscilación o ciclo .....                                                                                      | 116 |
| 3.3.5. Período ( $T'$ ) .....                                                                                        | 116 |
| 3.3.6. Frecuencia.....                                                                                               | 117 |
| 3.4. Descripción geométrica del M.A.S haciendo una analogía<br>con el movimiento circular(M.C).....                  | 117 |
| 3.4.1. Determinación de la posición o desplazamiento .....                                                           | 119 |
| 3.4.2. Determinación de la velocidad ( $v$ ) en función del tiempo ( $t$ ).....                                      | 120 |
| 3.4.3. Velocidad ( $v$ ) en función de la posición ( $x$ ).....                                                      | 120 |
| 3.4.4. La aceleración ( $a$ ) en función del tiempo ( $t$ ) .....                                                    | 121 |
| 3.4.5. La aceleración ( $a$ ) en función de la posición .....                                                        | 122 |
| 3.4.6. Determinación del período ( $T'$ )<br>en el movimiento oscilatorio (M.A.S) - Péndulo de resorte helicoidal .. | 123 |
| 3.4.7. Determinación de las leyes (ecuaciones)<br>del M.A.S. utilizando cálculo diferencial .....                    | 124 |
| 3.4.8. Energía en el movimiento oscilatorio (M.A.S.).....                                                            | 125 |
| 3.4.9. Osciladores prácticos del (M.A.S).....                                                                        | 127 |
| Capítulo IV. Ejercicios propuestos y resueltos de movimiento oscilatorio.....                                        | 135 |
| 4.1. Ejercicios resueltos.....                                                                                       | 135 |
| Bibliografía .....                                                                                                   | 174 |

## ÍNDICE DE FIGURAS

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Definición del torque y de la inercia de una masa puntual .....                   | 18 |
| 1.2. Definición del torque y de la inercia de un sistema de masas puntuales ....       | 20 |
| 1.3. Definición de la inercia de un sólido rígido .....                                | 21 |
| 1.4. Definición del teorema de Steiner .....                                           | 27 |
| 1.5. Definición del trabajo en el movimiento de rotación .....                         | 28 |
| 1.6. Definición de la energía cinética rotacional .....                                | 29 |
| 1.7. Definición de la energía potencial rotacional .....                               | 30 |
| 2.1. Inercia de un disco .....                                                         | 37 |
| 2.2. Inercia de una varilla con respecto al eje perpendicular .....                    | 38 |
| 2.3. Inercia de una placa con respecto al eje c .....                                  | 40 |
| 2.4. Inercia de una esfera respecto a su diámetro .....                                | 41 |
| 2.5. Inercia de un disco de la esfera .....                                            | 41 |
| 2.6. Inercia de una varilla con 5 cuerpos en ella .....                                | 46 |
| 2.7. Inercia en un triángulo con masas en cada vértice .....                           | 48 |
| 2.8. Movimiento de un carro sobre una pista circular .....                             | 51 |
| 2.9. Deslizamiento de un bloque por una pista .....                                    | 51 |
| 2.10. Movimiento circular uniformemente variado entre dos puntos .....                 | 52 |
| 2.11. Movimiento de una lata al descender por una pendiente .....                      | 53 |
| 2.12. Torque producido sobre una rueda .....                                           | 55 |
| 2.13. Torque producido por una partícula en un plano .....                             | 56 |
| 2.14. Torque producido por la aplicación de la fuerza en la partícula .....            | 57 |
| 2.15. Movimiento de una esfera al rodar hacia abajo .....                              | 60 |
| 2.16. Movimiento de una pelota que desciende desde la parte alta<br>de una pista ..... | 62 |
| 2.17. Movimiento de un cilindro al descender por el techo de una casa .....            | 63 |
| 2.18. Movimiento de dos objetos por el espacio .....                                   | 65 |
| 2.19. Movimiento de un bloque al caer por una polea .....                              | 71 |
| 2.20. Diagrama de cuerpo libre de la polea .....                                       | 72 |
| 2.21. Diagrama de cuerpo libre de la masa .....                                        | 73 |
| 2.22. Diagrama de cuerpo libre de las poleas junto con las masas .....                 | 74 |



|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.23. Diagrama de cuerpo libre de la masa izquierda .....                                        | 75  |
| 2.24. Diagrama de cuerpo libre de la masa derecha .....                                          | 75  |
| 2.25. Diagrama de cuerpo libre de la polea con relación a las masas .....                        | 76  |
| 2.26. Movimiento de un cuerpo atado a un cilindro por un plano inclinado .....                   | 77  |
| 2.27. Diagrama de cuerpo libre de la masa del cuerpo .....                                       | 78  |
| 2.28. Diagrama de cuerpo libre del cilindro .....                                                | 79  |
| 2.29. Niños sentados sobre una plancha horizontal .....                                          | 80  |
| 2.30. Distancias entre los niños sentados sobre una plancha .....                                | 81  |
| 2.31. Movimiento de una masa suspendida de dos cuerdas .....                                     | 83  |
| 2.32. Dimensiones entre las partículas conectadas entre sí .....                                 | 87  |
| 2.33. Dimensiones de las partículas en el eje Y .....                                            | 88  |
| 2.34. Camioneta suspendida por una polea con un bloque de contrapeso .....                       | 89  |
| 2.35. Movimiento de dos bloques conectados por una polea .....                                   | 90  |
| 2.36. Masas suspendidas por medio de una polea .....                                             | 90  |
| 2.37. Diagrama de cuerpo libre de dos masas unidas por una polea .....                           | 92  |
| 2.38. Masa unida a una polea y a un resorte .....                                                | 93  |
| 2.39. Movimiento de una barra que gira en el plano x .....                                       | 94  |
| 2.40. Movimiento circular de un péndulo conectado a una masa .....                               | 95  |
| 2.41. Polea cilíndrica unida a una masa .....                                                    | 96  |
| 2.42. Movimiento de dos discos en un eje vertical .....                                          | 97  |
| 2.43. Movimiento rotacional de las pesas .....                                                   | 99  |
| 2.44. Movimiento de un rodillo al aplicarle una fuerza .....                                     | 100 |
| 2.45. Masa colgando de una cuerda alrededor del eje interno .....                                | 100 |
| 2.46. Movimiento de una masa alrededor de una cuerda en el centro .....                          | 101 |
| 2.47. Dimensiones entre los astronautas .....                                                    | 102 |
| 2.48. Movimiento de un carrito de alambra por una fuerza .....                                   | 104 |
| 2.49. Movimiento de un carrito de alambres por distintas fuerzas .....                           | 105 |
| 2.50. Movimiento de una varilla en un plano vertical .....                                       | 107 |
| 2.51. Movimiento de una rueda conectada a una masa .....                                         | 108 |
| 2.52. Movimiento de un sistema de una polea unida a dos masas rectangulares ..                   | 109 |
| 2.53. Movimiento de un sistema de una polea unida a dos masas,<br>una de estas es circular ..... | 109 |
| 2.54. Movimiento de un disco polea unido a dos masas .....                                       | 110 |
| 2.55. Movimiento de un disco polea unido a una masa .....                                        | 111 |
| 2.56. Movimiento de una polea circular unida a dos masas .....                                   | 111 |
| 2.57. Movimiento de un anillo por un piso horizontal .....                                       | 112 |

|                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1. Definición de variables en el M.A.S. ....                     | 115 |
| 3.2. Analogía entre el M.A.S y el MVTO. circular.....              | 117 |
| 3.3. Definición de la posición (x) en función del tiempo (t).....  | 119 |
| 3.4. Definición de la velocidad (v) en función del tiempo (t)..... | 120 |
| 3.5. Definición de la aceleración en función del tiempo (t).....   | 121 |
| 3.6. Péndulo de resorte.....                                       | 123 |
| 3.7. La energía mecánica en el MVTO oscilatorio (M.A.S).....       | 127 |
| 3.8. Péndulo matemático.....                                       | 128 |
| 3.9. Diagrama del cuerpo libre (d.c.l) .....                       | 129 |
| 3.10. Péndulo físico (Posición de equilibrio).....                 | 131 |
| 3.11. Péndulo de torsión.....                                      | 133 |
|                                                                    |     |
| 4.1. Oscilación de un bloque de masa m conectado a un resorte..... | 136 |
| 4.2. Movimiento de las navajas para afeitar .....                  | 139 |
| 4.3. Movimiento de la superficie del océano .....                  | 142 |
| 4.4. Movimiento de un resorte con distintas masas .....            | 145 |
| 4.5. Movimiento de una barra unida a un eje de giro .....          | 147 |
| 4.6. Movimiento de una ro circular en un eje horizontal.....       | 148 |
| 4.7. Oscilación de un resorte unido a una masa.....                | 155 |
| 4.8. Oscilación de una masa unida a un resorte .....               | 158 |
| 4.9. Masa suspendida de un alambre .....                           | 160 |
| 4.10. Movimiento de un péndulo conectado a un resorte .....        | 164 |
| 4.11. Dimensiones del bloque de madera .....                       | 170 |

## **ÍNDICE DE TABLAS**

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Tabla de Momentos de Inercia para varillas y placas .....           | 23 |
| 1.2. Tabla de Momentos de Inercia de cilindros y esferas .....           | 24 |
| 1.3. Tabla del cuadrado del Radio de Giro $U^2$ de algunos cuerpos ..... | 26 |

## Glosario

| SÍMBOLO          | NOMBRE                              | UNIDAD    |
|------------------|-------------------------------------|-----------|
| $a$              | Aceleración                         | $m/s^2$   |
| $\alpha$         | Aceleración angular.                | $rad/s^2$ |
| $\vec{g}$        | Aceleración de la gravedad.         | $m/s^2$   |
| $\alpha_t$       | Aceleración tangencial.             | $m/s^2$   |
| $A$              | Amplitud.                           | $m$       |
| $CM$             | Centro de masa.                     |           |
| $k$              | Constante elástica del resorte.     | $N/m$     |
| $K'$             | Constante elástica de torsión.      | $N.m/rad$ |
| $\vec{\Delta r}$ | Desplazamiento.                     | $m$       |
| $d.c.l$          | Diagrama del cuerpo libre.          |           |
| $D$              | Diámetro.                           | $m$       |
| $R$              | Distancia entre los ejes paralelos. | $m$       |
| $Dr$             | Distancia recorrida.                | $m$       |
| $E$              | Energía.                            | $J$       |
| $EC$             | Energía cinética.                   | $J$       |
| $EC^r$           | Energía cinética rotacional.        | $J$       |
| $EM$             | Energía mecánica.                   | $J$       |
| $EP_E$           | Energía potencial elástica.         | $J$       |
| $EP_g$           | Energía potencial gravitacional.    | $J$       |
| $EP^r$           | Energía potencial rotacional.       | $J$       |
| $\Delta r$       | Espacio recorrido.                  | $m$       |
| $f$              | Frecuencia.                         | $Hz$      |
| $F$              | Fuerza.                             | $N$       |
| $\vec{F}_{ext}$  | Fuerza externa.                     | $N$       |
| $\vec{F}_t$      | Fuerza tangencial.                  | $J$       |

| SÍMBOLO     | NOMBRE                                     | UNIDAD     |
|-------------|--------------------------------------------|------------|
| $g$         | Gravedad (módulo).                         | $m/s^2$    |
| $\vec{I}_F$ | Impulsión de fuerza.                       | $Ns$       |
| $L$         | Longitud.                                  | $m$        |
| $m$         | Masa (propiedad del cuerpo).               | $kg$       |
| $M$         | Masa total del cuerpo rígido.              | $kg$       |
| $dm$        | Masa infinitesimal.                        |            |
| $\tau$      | Momento de torsión o torque.               | $mN$       |
| $I$         | Momento de inercia.                        | $kg.m^2$   |
| $\vec{L}$   | Momentum angular.                          | $kg.m^2/s$ |
| $MVTO$      | Movimiento.                                |            |
| $M.A.S$     | Movimiento armónico simple.                |            |
| $M.C.U.V$   | Movimiento circular uniformemente variado. |            |
| $N$         | Normal (fuerza).                           | $N$        |
| $T$         | Período.                                   | $s$        |
| $T'$        | Período (movimiento circular).             | $s$        |
| $x$         | Posición (utilizada en el M.A.S).          | $m$        |
| $\theta$    | Posición angular.                          | $rad$      |
| $P$         | Potencia.                                  | $w$        |
| $P_m$       | Potencia media.                            | $w$        |
| $rad$       | Radian.                                    | $rad$      |
| $r$         | Radio.                                     | $m$        |
| $U$         | Radio de giro.                             | $m$        |
| $v$         | Rapidez.                                   | $m/s$      |
| $U$         | Radio de giro.                             | $m$        |
| $\int$      | Símbolo de integral.                       |            |
| $\sum$      | Sumatoria.                                 |            |
| $T$         | Tensión (fuerza en estática y dinámica).   | $N$        |

| SÍMBOLO        | NOMBRE                                                   | UNIDAD  |
|----------------|----------------------------------------------------------|---------|
| $t$            | Tiempo.                                                  | $s$     |
| $\tau_{ext}$   | Torque externo.                                          | $m.N$   |
| $W$            | Trabajo.                                                 | $J$     |
| $W_{NETO}$     | Trabajo neto.                                            | $J$     |
| $\Delta EC$    | Variación de energía cinética.                           | $J$     |
| $\Delta S$     | Variación del arco descrito en el movimiento rotacional. | $m$     |
| $\Delta t$     | Variación de tiempo.                                     | $s$     |
| $\Delta$       | Variación finita.                                        |         |
| $d$            | Variación infinitesimal (derivada).                      |         |
| $\Delta\omega$ | Variación de velocidad angular.                          | $rad$   |
| $\omega$       | Velocidad angular o frecuencia angular.                  | $rad/s$ |
| $\vec{v}_m$    | Velocidad media.                                         | $m/s$   |

## Prólogo

Continuando con el estudio de la mecánica clásica, ampliamente abordado en los tres tomos previos de esta serie, que se mencionan a continuación, el presente cuarto volumen profundiza en nuevos aspectos de la física. La primera obra, publicada en 2022, titulada “Física. Fundamentos teórico-prácticos para Ciencias e Ingenierías” ([1]), presenta contenidos teóricos y prácticos sobre unidades y medidas, gráficas y funciones, y magnitudes vectoriales. En 2023, se publicó el segundo volumen, “Física. Fundamentos teórico-prácticos de Cinemática, Estática y Dinámica para Ciencias e Ingenierías” ([2]), que aborda los fundamentos de la cinemática, estática y dinámica. La tercera obra publicada a inicios del 2025, “Física. Fundamentos teórico-prácticos de trabajo, potencia, energía y cantidad de movimiento lineal para Ciencias e Ingenierías” ([3]), se centra en los fundamentos de trabajo, potencia, energía, impulso y cantidad de movimiento lineal. Ahora, con este cuarto libro, nos adentramos en los contenidos teóricos y prácticos de la dinámica rotacional y el movimiento oscilatorio que se presentan en el macrouniverso.

Este volumen está diseñado tanto para principiantes como para aquellos con conocimientos previos en física, y puede ser utilizado como material de referencia y consulta en estudios de carreras técnicas. En las etapas iniciales de formación, es esencial familiarizarse con la Mecánica Clásica y comprender el comportamiento de la materia no solo bajo solicitaciones lineales, sino también cuando está sometida a movimientos rotacionales y oscilatorios en el macrouniverso. Estos aspectos fundamentales de la física serán abordados en profundidad en este tomo.

Extendemos una cordial invitación a los jóvenes dedicados al estudio de carreras técnicas, así como a los profesionales del ámbito técnico, a realizar una lectura crítica de los contenidos de los cuatro tomos, especialmente de este último, que expone fenómenos que ocurren tanto en la naturaleza como en la interacción cotidiana entre seres vivos y objetos inanimados en nuestro planeta Tierra. En estas páginas se explora cómo las fuerzas rotacionales y las oscilaciones que son el fundamento de las ondas afectan el comportamiento de la materia frente a estas perturbaciones, demostrando que su respuesta no es la misma que la observada en interacciones traslacionales.

Diego Guillermo y Bernardo Ezequiel.

## Introducción

El cuarto tomo de Física aborda tanto los aspectos teóricos como prácticos del movimiento rotacional y oscilatorio, complementando así el estudio de la Mecánica Clásica desarrollado en los tomos anteriores, los cuales se centraron principalmente en la mecánica de traslación. El objetivo principal de esta obra es proporcionar a los futuros profesionales en ciencias e ingenierías un recurso técnico que les permita enfrentar los desafíos cotidianos en el ámbito de la ingeniería con una base sólida en física aplicable en el macrouniverso.

En el primer capítulo se estudia la dinámica rotacional. El conocimiento exclusivo de la dinámica de traslación limita al estudiante al análisis de sistemas que se mueven únicamente en línea recta, lo cual resulta insuficiente en la práctica, dado que la mayoría de los cuerpos también experimentan movimientos de rotación. Ejemplos de ello son los neumáticos de un automóvil o los mecanismos rotativos presentes en numerosos sistemas mecánicos. Por ello, se introduce el estudio detallado de la dinámica rotacional, complementado con conceptos previamente abordados, como el trabajo, la potencia y la energía, aplicados ahora al contexto de la rotación.

El segundo capítulo presenta una serie de ejercicios resueltos y propuestos, con modelos variados que incluyen, entre otros, la aplicación del principio de conservación de la cantidad de movimiento angular, ampliando así la comprensión de los fenómenos rotacionales.

Uno de los campos más relevantes dentro de la mecánica es la transmisión de energía a través de movimientos oscilatorios. La composición de estos movimientos da lugar al fenómeno del movimiento ondulatorio, característico de las ondas mecánicas, como el sonido o las vibraciones generadas por una erupción volcánica. Por ello, en las unidades tres y cuatro se aborda el estudio del movimiento oscilatorio, desarrollando sus leyes fundamentales, definiciones y ejemplos prácticos.



## Capítulo I

# DINÁMICA ROTACIONAL

Para estudiantes y profesionales formados en ciencias e ingenierías, especialmente en universidades y escuelas politécnicas, la Física Newtoniana resulta sumamente útil. Esta se aplica principalmente al estudio del movimiento de partículas y de cuerpos sólidos rígidos. En el caso de movimientos rotacionales, cualquier objeto que gire alrededor de un eje muy alejado de su masa puede considerarse una partícula; en cambio, si el eje atraviesa al propio cuerpo, se lo trata como un sólido rígido.

Un ejemplo claro es el planeta Tierra: se lo puede considerar una partícula cuando gira alrededor del Sol, en un movimiento con un período aproximado de un año. Por otro lado, se lo trata como un cuerpo rígido cuando rota sobre su propio eje, completando una vuelta en aproximadamente 24 horas.

En el estudio de la dinámica rotacional, se trabajará principalmente con cuerpos rígidos regulares y homogéneos, cuyos momentos de inercia pueden determinarse mediante fórmulas conocidas y disponibles en tablas especializadas. Estas tablas serán presentadas más adelante, y en algunos ejercicios resueltos se demostrará la obtención de dichas fórmulas mediante métodos adecuados de integración.

No obstante, en el caso de cuerpos irregulares, el momento de inercia se determinará expe-

rimentalmente, induciendo un movimiento oscilatorio y midiendo con precisión el período de oscilación. Este método es aplicable a sistemas del macrouniverso dentro del marco de la mecánica clásica newtoniana. En contraste, el estudio de fenómenos en el microuniverso requiere el enfoque de la Física Cuántica, una temática que no será abordada en esta obra.

## 1.1. Rotación de una masa puntual

Se puede considerar una masa puntual (o partícula) desde cuerpos infinitesimales como los átomos o las moléculas que constituyen la materia, como electrones rotando alrededor del centro del núcleo en el átomo, pero también masas puntuales pueden ser cualquier cuerpo, como por ejemplo los coches de un carrusel o de una rueda moscovita o incluso la luna girando alrededor de la tierra o la tierra alrededor del sol. Luego para considerar masas puntuales, o partículas el radio de giro debe ser muchísimo mayor a las dimensiones del cuerpo; en la Fig. 1.1, se ha representado una masa puntual girando en contra de las manecillas del reloj con una aceleración angular  $\alpha$ , alrededor de un eje fijo que pasa perpendicular al plano de la figura por el punto “o”. Luego el radio de giro será “r”.

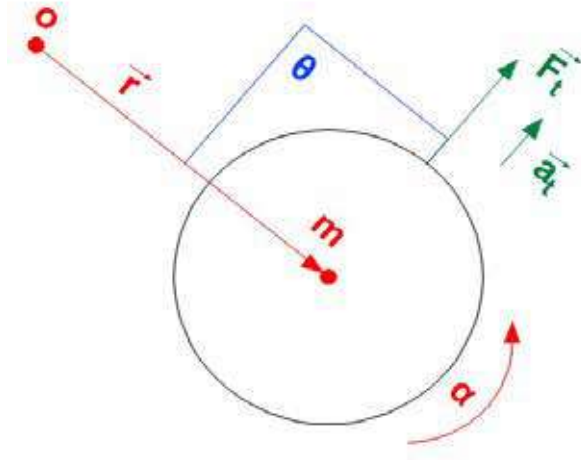


Figura 1.1. Definición del torque y de la inercia de una masa puntual.

La causa de la rotación será un torque o un momento ( $\tau$ ) provocado por un par de fuerzas, que son la fuerza tangencial ( $\vec{F}_t$ ) perpendicular al radio  $r$  y otra fuerza de sentido contrario que actuará en el eje fijo, por ende, el torque será:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_t \quad (1.1)$$

En donde  $\vec{F}_t$  = Fuerza Tangencial (Newton = N)

$\vec{r}$  : Vector posición del punto de aplicación de  $\vec{F}_t$  respecto a "o"

El módulo del torque  $|\vec{\tau}|$  o del producto cruz es:

$$\tau = r \cdot F_t \cdot \sin \theta \quad (1.2)$$

Pero para el caso:  $\theta = 90^\circ \rightarrow \sin 90^\circ = 1$

$$\vec{F}_t = m \cdot a_t = m r \alpha$$

$$a_t = r \alpha$$

$a_t$  = Aceleración tangencial ( $\text{m/s}^2$ )

$\alpha$  = Aceleración angular ( $\text{rad/s}^2$ )

$r$  = Radio ( $\text{m}$ )

En (1.2):

$$\tau = r \cdot m \cdot r \cdot \alpha$$

$$\tau = m r^2 \cdot \alpha \quad (1.3)$$

Ahora si definimos como:

$$I = m r^2 \quad (1.4)$$

En donde:

$I$  = Momento de inercia ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )

La ecuación (1.3) se puede expresar como:

$$\tau = I \cdot \alpha \quad (1.5)$$

Que es la causa o ley del movimiento rotacional, análoga a la causa o ley del movimiento de traslación que dice:  $F = m \cdot a$ .

En la cual la causa de la traslación es la fuerza ( $F$ ) , en cambio la causa de la rotación es el torque ( $\vec{\tau}$ ), la fuerza provoca una aceleración lineal o tangencial ( $a = a_t$ ) en la traslación, en cambio el torque provoca un MVTO. Con una aceleración angular ( $\alpha$ ) . En la traslación la inercia que presenta el cuerpo que interactúa con otros cuerpos que le trasladan es la masa ( $m$ ) propiedad intrínseca del cuerpo. En cambio, en la rotación la inercia que presenta el cuerpo para rotar se llama "Momento de Inercia".  $I = m r^2$  que no depende únicamente de la masa ( $m$ ) , sino además del radio ( $r$ ) alrededor del cual este girando la masa puntual.

## 1.2. Rotación de un sistema de masas puntuales (n) alrededor de un eje fijo

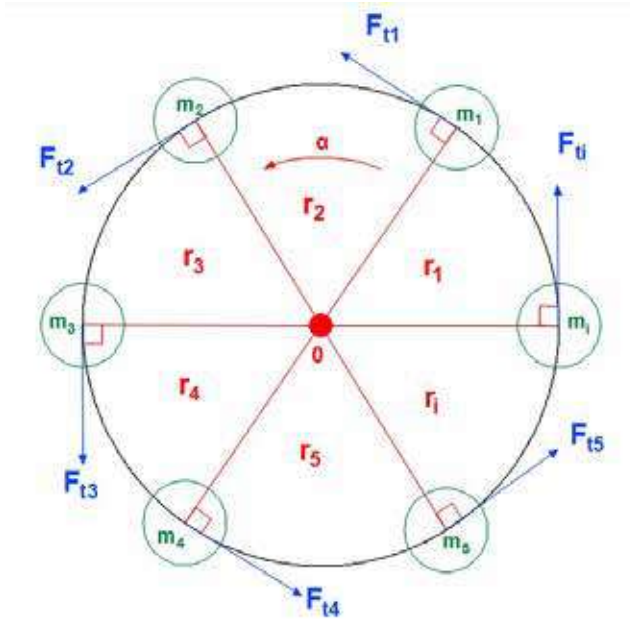


Figura 1.2. Definición del torque y de la inercia de un sistema de masas puntuales.

La Fig. 1.2, representa a un sistema de masas puntuales girando en contra de las manecillas del reloj, alrededor de un eje fijo perpendicular al plano de la figura y que pasa por el punto “0” con la misma aceleración angular  $\alpha = \text{constante}$ .

El número de partículas puede ser: 1, 2, 3, ...  $i$  y el torque de cada partícula estará dado por:

$$\tau_i = F_{ti}r_i = m_i r_i^2 \alpha \text{ y el torque total: } \tau_{TOTAL} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_i = \sum \tau_i$$

$$\tau_{TOTAL} = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_i r_i^2) \alpha = I \alpha$$

En donde:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_i r_i^2, \text{ luego: } \tau_{TOTAL} = I \alpha$$

En donde el momento de inercia se determina de la siguiente forma:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (1.6)$$

### 1.3. Rotación de un sólido rígido alrededor de un eje fijo

Se considera sólido rígido a cualquier cuerpo que está girando alrededor de un eje fijo perpendicular a cualquiera de sus secciones frontales o transversales con la condición de que el eje atraviese el cuerpo.

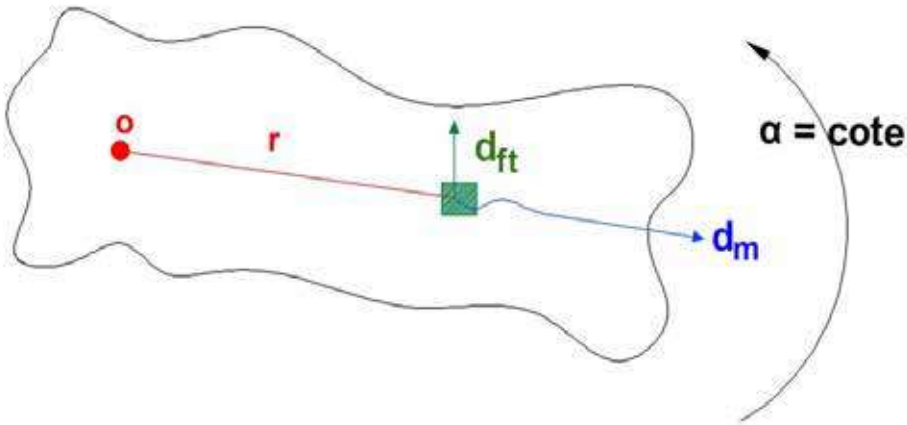


Figura 1.3. Definición de la inercia de un sólido rígido.

La Fig. 1.3 representa un cuerpo de forma cualesquiera que está girando alrededor de un eje fijo que pasa en forma perpendicular al área frontal que se ha dibujado y que atraviesa el cuerpo en el punto “O”.

En este caso para determinar el torque ( $\tau$ ) que causa la rotación de este cuerpo rígido de forma irregular, lo que se hace es considerar subdividido el cuerpo rígido en “n” partículas

infinitesimales de masa “dm” que es una masa infinitesimal, que la podríamos considerar como masa puntual e iniciaríamos el cálculo de la rotación de esta masa alrededor del eje que pasa por “O” con un radio “r”. El torque sería un torque infinitesimal:  $d\tau = r \cdot dF_t$ .

En donde:

$$dF_t = a_t \cdot dm = r\alpha dm$$

$$a_t = r\alpha$$

Luego el torque será:

$$d\tau = r \cdot r\alpha \cdot dm = r^2 dm \alpha$$

Ahora como la aceleración angular ( $\alpha$ ) es constante, resulta:

$$\int d\tau = \alpha \int r^2 dm$$

Pero como el torque:  $\tau = I\alpha$  (1.5) en ese caso el momento de inercia se lo determinaría por:

$$I = \int r^2 dm \quad (1.7)$$

Esta integral es una integral de volumen y los límites dependerán del cuerpo y en donde se encuentre la posición del eje de giro e inclusive la dirección del eje.

Para cuerpos irregulares como el que posee una piedra u otro objeto de forma irregular, es dificultoso resolver una integral y la determinación del momento de inercia se prefiere hacerlo en forma experimental, haciéndolo rotar como un péndulo de torsión, ver ejemplo en la unidad siguiente en MVTO oscilatorio.

En el caso de cuerpos regulares, como una varilla cilíndrica, una placa, un cilindro o una esfera, entre otros, cuando giran alrededor de un eje perpendicular a una de sus secciones transversales o frontales y que atraviesa el cuerpo por la posición del centro de masa, la integral de la ecuación (1.7) es factible de resolver. De hecho, algunos autores ya han resuelto esta integral y nos proporcionan los resultados en forma de ecuaciones o fórmulas que permiten calcular los momentos de inercia de cuerpos rígidos regulares. Esta información se encuentra en tablas o libros especializados y una réplica de estas se presenta en las Tablas 1.1 y 1.2.

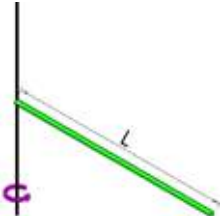
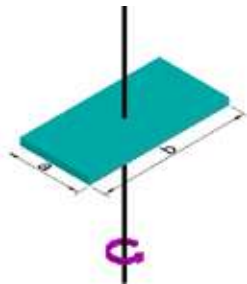
| Denominación                                           | Cuerpo y Eje                                                                        | Momento de Inercia I          |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| Varilla delgada, el eje pasa por el centro.            |    | $I = \frac{1}{12}ML^2$        |
| Varilla delgada, el eje pasa por un extremo.           |    | $I = \frac{1}{3}ML^2$         |
| Placa delgada, el eje pasa por el centro de la placa.  |   | $I = \frac{1}{2}M(a^2 + b^2)$ |
| Placa delgada, el eje pasa por un extremo de la placa. |  | $I = \frac{1}{3}Ma^2$         |

Tabla 1.1. Tabla de Momentos de Inercia para varillas y placas.



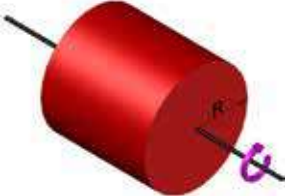
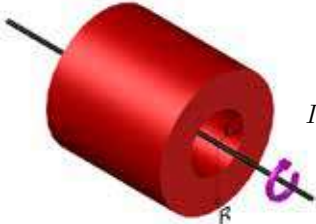
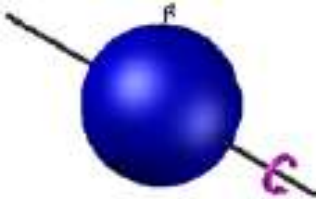
| Denominación                                                | Cuerpo y Eje                                                                        | Momento de Inercia I          |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| Cilindro sólido, el eje pasa por el centro.                 |    | $I = \frac{1}{2}MR^2$         |
| Cilindro hueco de pared delgada, el eje pasa por el centro. |    | $I = MR^2$                    |
| Cilindro hueco, el eje pasa por el centro.                  |    | $I = \frac{1}{2}M(r^2 + R^2)$ |
| Esfera sólida, el eje pasa por el centro.                   |   | $I = \frac{2}{5}MR^2$         |
| Esfera hueca de pared delgada, el eje pasa por el centro.   |  | $I = \frac{2}{3}MR^2$         |

Tabla 1.2. Tabla de Momentos de Inercia de cilindros y esferas.

## 1.4. Radio de giro (U)

Si consideramos teóricamente al cuerpo rígido como una masa puntual o concentrada en un punto, entonces se define como radio de giro (U), a la distancia entre la masa concentrada y el eje de giro, sin que se modifique el momento de inercia (I) del cuerpo rígido.

$$U^2 = \frac{I}{M} \quad (1.8)$$

En donde:

M = Masa Total del cuerpo rígido (kg)

U = radio de giro (m)

I = momento de inercia del cuerpo rígido (Kg.m<sup>2</sup>)

Si nos dan como información en lugar del momento de inercia directamente, el radio de giro al cuadrado ( $U^2$ ), solo hay que multiplicar por la masa y esta relación será el momento de inercia ( $MU^2 = I$ ). En la Tabla 1.3 se observan las figuras y las fórmulas para proceder adecuadamente.

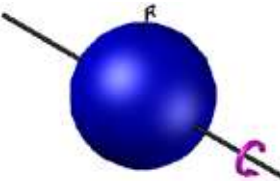
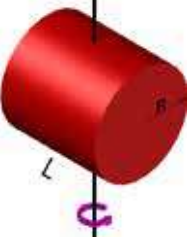
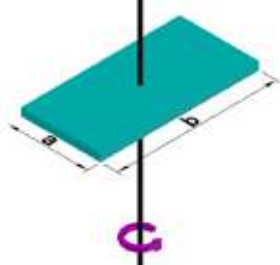
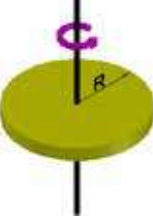
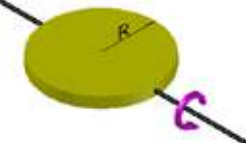
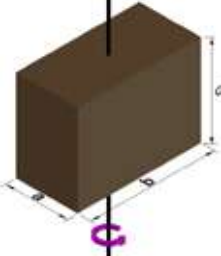
| $U^2$                | Cuerpo y Eje                                                                        | $U^2$                            | Cuerpo y Eje                                                                         |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{L^2}{12}$     |    | $\frac{R^2}{2}$                  |    |
| $\frac{2R^2}{5}$     |    | $\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}$ |    |
| $\frac{a^2+b^2}{12}$ |   | $\frac{R^2}{2}$                  |    |
| $\frac{a^2}{12}$     |  | $\frac{R^2}{4}$                  |  |
| $\frac{a^2+b^2}{12}$ |  | $R^2$                            |  |

Tabla 1.3. Tabla del cuadrado del Radio de Giro  $U^2$  de algunos cuerpos.

## 1.5. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

Resulta frecuente que, en un diseño, se desee el momento de inercia de un cuerpo rígido con respecto a cualquier eje perpendicular a cualquier sección (área) del mismo que atraviese el cuerpo, pero no necesariamente por el centro de masa. Y si en las tablas solo se dispone de momentos de inercia con relación a ejes que atraviesan el centro de masa.

Ejemplo:  $I_0$  (solo se conoce este momento de inercia). Fig. 1.4

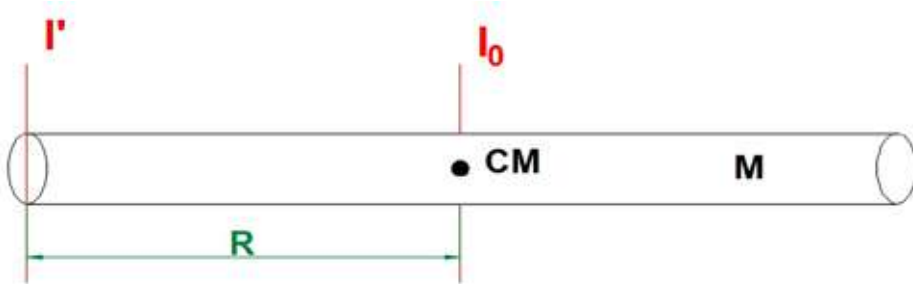


Figura 1.4. Definición del teorema de Steiner.

Pero que lo que se necesite sea el momento de inercia  $I'$ .

$I'$  Que corresponde a un eje que pasa por el extremo de la varilla y no por su centro de masa.

Si este eje es paralelo al que atraviesa el eje, por el centro de masa (CM). Es útil aplicar el Teorema de Steiner o de los ejes paralelos, que se expresa así:

$$I = I_0 + MR^2 \quad (1.9)$$

En donde:

$I'$  = Momento de inercia respecto a un eje paralelo al eje que pasa por CM.

$I_0$  = Momento de inercia respecto a un eje que atraviesa el CM.

$R$  = Distancia entre los ejes paralelos[4].

$M$  = Masa del cuerpo.

## 1.6. Trabajo en el movimiento rotacional

Consideramos a un cuerpo rígido rotando en el plano  $xy$  alrededor de un eje perpendicular al plano que pasa por "O", considerando el desplazamiento infinitesimal  $ds$ , el mismo que sucede al aplicarse la fuerza tangencial ( $F_t$ ) que aproximadamente tiene la misma dirección y sentido del desplazamiento  $ds$  y el ángulo entre  $F_t$  y  $ds$  sería  $0^\circ$ , luego  $\cos 0^\circ = 1$ , entonces el trabajo realizado por la fuerza tangencial ( $F_t$ ) será:  $dW = F_t \cdot ds \cdot \cos 0^\circ$

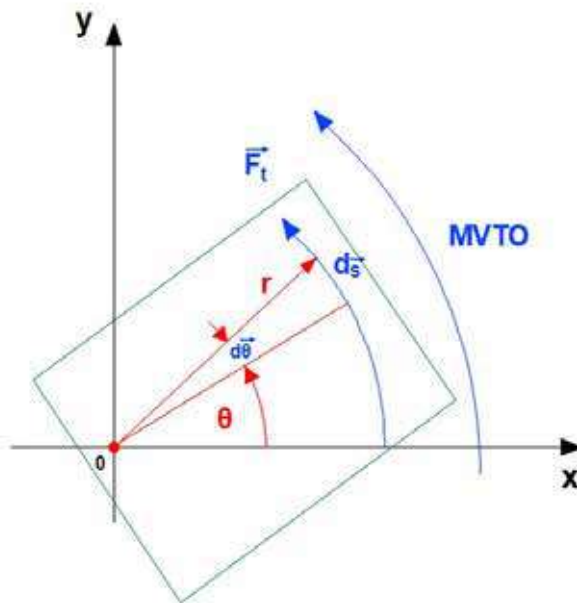


Figura 1.5. Definición del trabajo en el movimiento de rotación.

Ahora el pequeño módulo del desplazamiento ( $ds$ ) tiene también la siguiente relación:

$$ds = r d\theta$$

Entonces el trabajo infinitesimal será:

$$dW = F_t \cdot r d\theta \text{ y como } \tau = F_t \cdot r$$

Para determinar el trabajo total realizado en un desplazamiento angular finito, debemos sumar (o integrar) ambos miembros de esta ecuación:

$$\int_0^F dW = \int_{\theta_0}^{\theta_F} \tau \cdot d\theta \quad (1.10)$$

Por lo que el trabajo resultante sería:

$$W_{OF} = \int_{\theta_0}^{\theta_F} \tau \cdot d\theta \quad (1.11)$$

## 1.7. Energía cinética rotacional

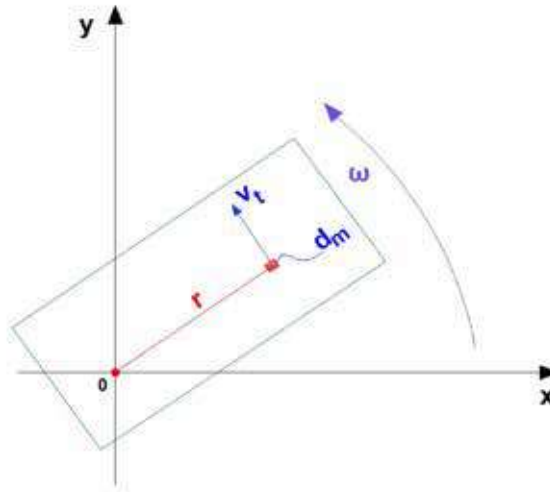


Figura 1.6. Definición de la energía cinética rotacional.

Considerando un cuerpo rígido rotando en el plano X-Y alrededor de un eje perpendicular al plano que pasa por “O”, y que se mueve con una velocidad angular ( $\omega$ ) constante, para determinar la energía cinética del cuerpo rígido en rotación subdividimos al cuerpo rígido en elementos infinitesimales y elegimos uno de ellos de masa  $dm$  que gira con un radio  $r$  alrededor de “O” (Fig. 1.6) con una velocidad tangencial o lineal ( $v_t$ ), entonces la energía cinética rotacional del elemento de masa  $dm$  será:

$$d E_c^{(r)} = \frac{1}{2} dm v_t^2$$

Ahora como  $v_t = r \omega$ , nos queda:

$$d E_c^{(r)} = \frac{1}{2} dm r^2 \omega^2$$

$$E_c^{(r)} = d E_c^{(r)} = \frac{1}{2} dm r^2 \omega^2$$

$$E_c^{(r)} = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm$$

Como:  $r^2 dm = I$  nos da:

$$E_c^{(r)} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1.12)$$

## 1.8. Energía potencial rotacional

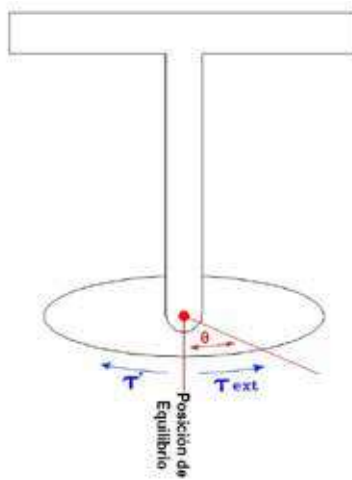


Figura 1.7. Definición de la energía potencial rotacional.

Si un cuerpo puede deformarse angularmente, al aplicar un torque externo ( $\tau_{ext}$ ), el cuerpo reacciona y aplica un torque elástico recuperador, que será:

$$\tau' = K' \theta \quad (1.13)$$

En donde:  $K'$  (Constante elástica de torsión)

$$K' = \frac{\tau}{\theta} \frac{mN}{rad}$$

El trabajo realizado por el torque externo será:

$$W_{OF} = \int_{\theta_0}^{\theta_F} \tau \cdot d\theta$$

Como el torque externo es igual al torque recuperador  $\tau = \tau' = K'\theta$  tenemos:

$$W_{OF} = \int_{\theta_0}^{\theta_F} \tau' \cdot d\theta$$

$$W_{OF} = \int_{\theta_0}^{\theta_F} K'\theta \cdot d\theta$$

$$W = \frac{1}{2}K'\theta_F^2 - \frac{1}{2}K'\theta_0^2$$

Se define a la energía potencial rotacional  $Ep^r$  como:

$$Ep^r = \frac{1}{2}K'\theta^2 \quad (1.14)$$

Entonces el trabajo será igual a la variación de energía potencial rotacional.

$$W = \Delta Ep^r \quad (1.15)$$

## 1.9. Teorema del trabajo y la energía cinética rotacional

Si aplicamos un torque ( $\tau$ ) sobre un cuerpo que pueda rotar, y este genera variación en la velocidad angular ( $\omega$ ), el trabajo realizado por este torque será: partiendo de la ecuación (1.10).

$$W_{OF} = \int_{\theta_0}^{\theta_F} \tau \cdot d\theta$$

Ahora como:  $\tau = I \alpha$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\theta}{d\theta}$$

Y como  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  tenemos que:  $\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$

Y el torque será:  $\tau = I\omega \frac{d\omega}{d\theta}$

Luego el trabajo será:

$$W = \int_{\omega_0}^{\omega_F} I\omega \frac{d\omega}{d\theta} d\theta$$

Como se cambió de variable, los límites también corresponden a esta variable (velocidad angular  $\rightarrow \omega$ )

$$W = \frac{1}{2}I\omega_F^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

Como  $EC^{(r)} = \frac{1}{2}IW^2$  tenemos:



$$W = EC_F^{(r)} - EC_0^{(r)} = \Delta EC^{(r)} \quad (1.16)$$

## 1.10. Teorema del trabajo y la energía potencial rotacional

Para el caso del péndulo de torsión de la Fig. 1.7 tenemos que:

$$\tau_{ext} = -\tau' = -K'\theta$$

Partiendo de la ecuación (1.10) el trabajo será:

$$\begin{aligned} \int_0^F dW &= \int_{\theta_0}^{\theta_F} \tau \cdot d\theta \\ \int_0^F dW &= \int_{\theta_0}^{\theta_F} \tau \cdot d\theta = -K' \int_{\theta_0}^{\theta_F} \theta d\theta = -(K' \frac{\theta_F^2}{2} - K' \frac{\theta_0^2}{2}) \end{aligned}$$

Ahora como:

$$Ep^{(r)} = \frac{1}{2} K' \theta^2$$

Tenemos que el trabajo es la variación de energía potencial rotacional con signo negativo.

$$W = \Delta Ep^{(r)} \quad (1.17)$$

## 1.11. Conservación de la energía en la rotación

Considerando que los torques que actúan son conservativos, podemos igualar las ecuaciones (1.16) y (1.17).

$$\begin{aligned} EC_F^{(r)} - EC_0^{(r)} &= -(EP_F^{(r)} - EP_0^{(r)}) \\ EC_F^{(r)} - EC_0^{(r)} &= -EP_F^{(r)} + EP_0^{(r)} \\ EC_0^{(r)} + EP_0^{(r)} &= EC_F^{(r)} + EP_F^{(r)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Entonces la ecuación (1.18) expresa que la energía mecánica rotacional inicial es igual a la energía mecánica rotacional final, lo que significa que la Energía Mecánica en la rotación también se conserva en presencia de torques conservativos, como el elástico. Ahora si actuaran torques no conservativos por causa de la fricción, por ejemplo, la ecuación (1.18) se transfor-

maría en:

$$EC_0^{(r)} + EP_0^{(r)} = EC_F^{(r)} + EP_F^{(r)} + W_{NC} \quad (1.19)$$

En donde  $W_{NC}$  es el trabajo o la energía que se pierde por la fricción.

## 1.12. Teorema del trabajo y la energía para sistemas en donde existe la traslación y la rotación a la vez

La ecuación (1.19) para sistemas que se trasladan y rotan simultáneamente como los neumáticos de un automóvil, o la llanta de una bicicleta, sería:

$$\begin{aligned} EC_0^{(TOTAL)} + EP_0^{(TOTAL)} &= EC_F^{(TOTAL)} + EP_F^{(TOTAL)} + W_{NC}^{(t+r)} \\ EC_0^{(t)} + EC_0^{(r)} + EP_0^{(t)} + EP_0^{(r)} &= EC_F^{(t)} + EC_F^{(r)} + EP_F^{(t)} + EP_F^{(r)} + W_{NC}^{(t+r)} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Donde  $W_{NC}^{(t+r)}$  es el Trabajo de Fuerzas no Conservativas de traslación y rotación [5], [6].

## 1.13. Cantidad de movimiento angular o momentum angular ( $L$ )

La cantidad de movimiento angular ( $L$ ) se define como el producto cruz entre el vector posición ( $r$ ) y la cantidad de movimiento lineal ( $p$ ), así:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1.21)$$

Como  $p = m v$  también se podría expresar así:

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} \quad (1.22)$$

El módulo de este vector será:  $L = m r v \sin 90^\circ$  y como  $v = r \omega$  nos da:  $L = m r r \omega = m r^2 \omega$ ; como  $I = m r^2$  tenemos:

$$L = I \omega \quad (1.23)$$

dónde

- $L$  es la cantidad de movimiento angular en  $kg \cdot m^2/s$
- $I$  representa el momento de inercia en  $kg \cdot m^2$
- $\omega$  es la velocidad angular en  $rad/s$

## 1.14. Definición del torque a partir del momentum angular

Si derivamos en función del tiempo a la ecuación (1.21), nos da:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Ahora, como  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

$\vec{v}$  = vector velocidad lineal  $\vec{p} = m \vec{v}$

El primer término del segundo miembro de esta ecuación sería:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = m \vec{v} \times \vec{v} = 0$$

Porque el producto cruz de un vector por sí mismo es cero.

Ahora la derivada de la cantidad de movimiento lineal ( $\vec{p}$ ) con respecto al tiempo.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Reemplazando estos valores nos da:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Pero como:  $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$  tenemos:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (1.24)$$

Como vemos, el torque ( $\vec{\tau}$ ) también se puede expresar como la derivada de la cantidad de movimiento angular ( $\vec{L}$ ) con respecto al tiempo.

El módulo del torque, según la ecuación (1.24) será:

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

Como  $L = I \omega$  nos da:

$$\tau = \frac{d(I\omega)}{dt} \text{ como } I = \text{constante}$$

$$\tau = I \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha$$

$$\tau = I \alpha$$

Que es la segunda ley de Newton para la rotación.

Al igual que en la traslación existe conservación de movimiento lineal, la rotación también se conserva la cantidad de movimiento angular entre una situación inicial y una situación final, para un sistema en rotación, así tenemos: cantidad de movimiento angular inicial es igual a la cantidad de movimiento angular final [4]:

$$\sum L_0 = \sum L_F \quad (1.25)$$

Siendo  $L = I \omega$  según la ecuación (1.23).

## Capítulo II

# EJERCICIOS PROPUESTOS Y RESUELTOS DE DINÁMICA ROTACIONAL

En este capítulo, para facilitar la comprensión del lector, se numeran de manera específica las ecuaciones utilizadas en cada ejercicio resuelto, haciendo referencia directa al problema correspondiente. Además, al presentar los datos de cada ejercicio, se especifican claramente las variables e incógnitas que deben determinarse, proporcionando una estructura más clara para el análisis y resolución.

### 2.1. Ejercicios resueltos

#### CÁLCULOS DE MOMENTOS DE INERCIA

**Ejercicio 2.1.1.** *Determinar el momento de inercia ( $I_1$ ) de un disco con respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro (Fig. 2.1)*

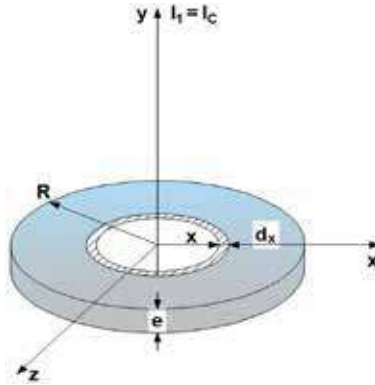


Figura 2.1. Inercia de un disco.

**Resolución:** Asumiendo una distribución de masa uniforme en el disco de radio  $R$  y espesor  $e$  y masa  $m$  que se encuentra en el plano  $xz$ , tomamos un elemento infinitesimal (anillo) de masa  $dm$  que dista  $x$  del eje de rotación “ $y$ ”.

El elemento es un anillo de radio  $x$ , de anchura  $dx$  y espesor “ $e$ ”.

Si recortáramos este anillo y lo extendiéramos se convertiría en un prisma rectangular de longitud (perímetro)  $2\pi x$  y anchura  $dx$ , espesor  $e$ , cuya masa sería:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{m}{v} \\ &= \frac{dm}{dv},\end{aligned}$$

despejando  $dm$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned}dm &= \frac{mdv}{v} \\ &= \frac{m \cdot 2\pi \cdot x \cdot dx \cdot e}{\pi \cdot R^2 \cdot e} \\ &= \frac{2mxdx}{R^2}.\end{aligned}$$

El momento de inercia de este anillo está dado por:

$$I_c = \int x^2 dm,$$

reemplazando el valor del diferencial  $dm$  en ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
 I_1 = I_c &= \int_0^R x^2 \cdot \frac{2m x dx}{R^2} \\
 &= \frac{2m}{R^2} \int_0^R x^3 dx \\
 &= \frac{2m}{R^2} \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^R \\
 &= \frac{2m R^4}{4 R^2} \\
 &= \frac{1}{2} m R^2
 \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.2.** Determinar el momento de inercia ( $I_2$ ) de una varilla de masa  $m$  y longitud  $L$  respecto a un eje perpendicular a la varilla y que pasa por el centro de masa. (Fig. 2.2).

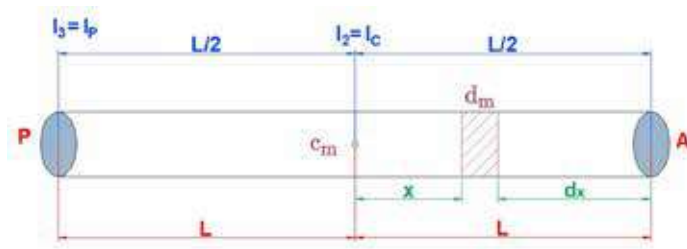


Figura 2.2. Inercia de una varilla con respecto al eje perpendicular.

**Resolución:** Su momento de inercia estará dado por:

$$\begin{aligned}
 I_c &= \int x^2 dm \\
 &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{m}{L} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m}{L} \left. x^3 \right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
 &= \frac{m}{3L} \left[ \left( \frac{L}{2} \right)^3 - \left( -\frac{L}{2} \right)^3 \right] \\
 &= \frac{m}{3L} \left( \frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) \\
 &= \frac{m}{3L} \left( \frac{L^3}{4} \right) \Rightarrow I_2 \\
 &= \frac{1}{12} m L^2
 \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.3.** Determine el momento de inercia ( $I_3$ ) de la misma varilla anterior, pero con respecto a un eje perpendicular a la varilla que pasa por uno de sus extremos ( $I_p$ ).

**Resolución:** Para simplificar podemos aplicar el “Teorema de Steiner”:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= I_p \\
 &= I_c + m \left( \frac{L}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{12} m L^2 + \frac{1}{4} m L^2 \\
 &= \frac{4}{12} m L^2 \\
 &= \frac{1}{3} m L^2
 \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.4.** Determinar el momento de inercia ( $I_4$ ) de una placa rectangular de masa  $m$  y de espesor  $e$ , con respecto al eje  $c - c$  que se muestra en la Fig. 2.3.



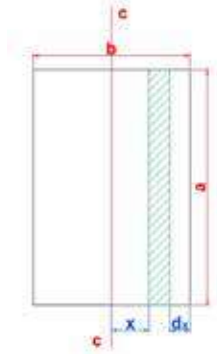


Figura 2.3. Inercia de una placa con respecto al eje c.

$$\begin{aligned}
 I_4 &= I_c \\
 &= \int x^2 dm \\
 &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{m}{b} x^2 dx \\
 &= \frac{m}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx \\
 &= \frac{m}{b} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\
 &= \frac{m}{3b} \left[ \left( \frac{b}{2} \right)^3 - \left( -\frac{b}{2} \right)^3 \right] \\
 &= \frac{m}{3b} \left( \frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right) \\
 &= \frac{m}{3b} \left( \frac{b^3}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{12} mb^2
 \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.5.** Determinar el momento de inercia ( $I_5$ ) de una esfera de masa  $m$  y radio  $R$

respecto a uno de sus diámetros (Eje  $z$ ). Fig. 2.4.

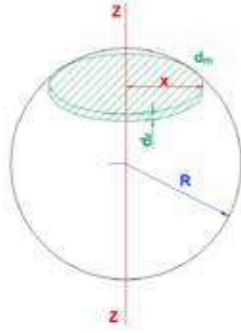


Figura 2.4. Inercia de una esfera respecto a su diámetro.

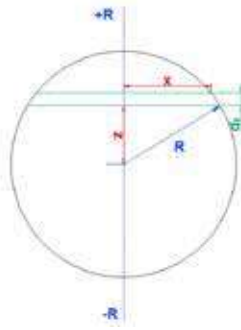


Figura 2.5. Inercia de un disco de la esfera.

**Resolución:** Dividimos a la esfera en discos de radio  $x$  y de espesor  $dz$ , y el momento de inercia de cada disco infinitesimal será:

$$\int dI_z = \int \frac{1}{2} x^2 dm.$$

La masa de cada uno de estos discos estará dada por:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{v} \\ &= \frac{dm}{dv}, \end{aligned}$$

despejando el diferencial  $dm$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned} dm &= \frac{m dv}{v} \\ &= \frac{m \pi x^2 dz}{\frac{4}{3} \pi R^3} \\ &= \frac{3}{4} \frac{m}{R^3} x^2 dz. \end{aligned}$$

Como:  $x^2 = R^2 - z^2$  finalmente obtenemos que:

$$\begin{aligned} I_5 &= I_z \\ &= \int \frac{1}{2} x^2 dm \\ &= \int \frac{1}{2} x^2 \left( \frac{3}{4} \frac{m}{R^3} x^2 dz \right) \\ &= \frac{3m}{8R^3} \int x^4 dz \\ &= \frac{3m}{8R^3} \int (R^2 - z^2) dz \\ &= \frac{3m}{8R^3} \int (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz \\ &= \frac{3m}{8R^3} \left[ \int_{-R}^R R^4 dz - \int_{-R}^R 2R^2 z^2 dz + \int_{-R}^R z^4 dz \right] \\ &= \frac{3m}{8R^3} \left[ R^4 \cdot z \Big|_{-R}^R - 2R^2 \frac{z^3}{3} \Big|_{-R}^R + \frac{z^5}{5} \Big|_{-R}^R \right] \\ &= \frac{3m}{8R^3} \left[ R^4 (R + R) + \frac{2}{3} R^2 (R^3 + R^3) + \frac{1}{5} (R^5 + R^5) \right] \\ &= \frac{3m}{8R^3} \left[ 2R^5 - \frac{4}{3} R^5 + \frac{2}{5} R^5 \right] \\ &= \frac{3m}{8R^3} \left[ 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right] = \frac{3mR^2}{8} \left[ \frac{30 - 20 + 6}{15} \right] \\ &= \frac{3mR^2}{8} \left( \frac{16}{5} \right) = \frac{2}{5} m R^2 \\ &= \frac{2}{5} m R^2 \end{aligned}$$

## EJERCICIOS DE MOVIMIENTO ROTACIONAL CON ACELERACIÓN CONSTANTE

**Ejercicio 2.1.6.** Una rueda inicialmente en reposo empieza a girar con una aceleración angular constante hasta una velocidad angular de 12 rad/s en 3 s. Determinar:

- La magnitud de la aceleración angular de la rueda.
- El desplazamiento angular en radianes que realiza cuando gira durante este tiempo.

Datos:

$$\alpha = \text{cote (M.C.U.V)}$$

$$w_F = 12 \text{ rad/s}$$

$$w_0 = 0 \text{ (Reposo)}$$

$$t_{OF} = 3 \text{ s}$$

**Resolución (a):** Aplicando las ecuaciones del M.C.U.V.A, tenemos que  $w_F = w_0 + \alpha \cdot t_{OF}$ , despejando  $\alpha$  obtenemos lo deseado:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{w_F}{t_{OF}} \\ &= \frac{12}{3} \\ &= 4 \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

**Resolución (b):** El desplazamiento angular estará dado por:

$$\begin{aligned}\theta_{OF} &= w_0 \cdot t_{OF} + \frac{1}{2} \alpha \cdot t_{OF}^2 \\ &= \frac{1}{2} (4) (3)^2 \\ &= 18 \text{ rad}\end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.7.** La tornamesa de un tocadiscos gira a razón de  $33\frac{1}{3} \frac{\text{rev}}{\text{min}}$  y tarda 60 s en detenerse cuando se apaga. Determinar:

- La magnitud de su aceleración angular.
- El número de revoluciones que realiza antes de detenerse.

Datos:

$$w_0 = 33\frac{1}{3} \text{ rev/min}$$

$$w_0 = \frac{100}{3} \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}}$$

$$w_0 = \frac{10}{9} \pi = 3,49 \text{ rad/s}$$

$$t_{OF} = 60 \text{ s}$$

$$w_F = 0$$

**Resolución (a):** Aplicando las ecuaciones del M.C.U.V.R (Retardado) obtenemos la siguiente igualdad  $w_F = w_0 + \alpha \cdot t_{OF}$ , de donde despejando  $\alpha$  obtenemos lo deseado:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{w_0}{t_{OF}} \\ &= -\frac{3,49}{60} \\ &= -0,058 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

**Resolución (b):** El número de revoluciones que da antes de detenerse estará dado por:

$$\begin{aligned} \theta_{OF} &= w_0 \cdot t_{OF} + \frac{1}{2} \alpha \cdot t_{OF}^2 \\ &= 3,49 (60) + \frac{1}{2} (-0,058) (60)^2 \\ &= 104,7 \text{ rad} \times \frac{\text{rev}}{2\pi \text{ rev}} \\ &= 16,66 \text{ rev} \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.8.** La posición angular de un punto sobre una rueda se describe por medio de la ecuación:  $\theta = 5 + 10t + 2t^2$  en donde  $t$  (s) y  $\theta$  (rad). Determine la posición, velocidad y aceleración angular de los puntos  $t = 0$  y  $t = 3$ .

Datos:

$$\theta = 5 + 10t + 2t^2$$

$$t \text{ (s)} \rightarrow \theta \text{ (rad)}$$

**Resolución:** Aplicando las definiciones se tiene que:

$$\begin{aligned} w &= \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (5 + 10t + 2t^2) \\ &= 10 + 4t. \end{aligned}$$

La aceleración angular estará dada por:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{dw}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (10 + 4t) \\ &= 4 \text{ rad/s}^2 \quad (\text{constante}). \end{aligned}$$

Con las ecuaciones anteriores podemos calcular fácilmente la posición, velocidad y aceleración angular. Para  $t = 0$ , se tiene que:

- Posición:  $\theta = 5 + 10(0) + 2(0)^2 = 5 \text{ rad}$
- Velocidad angular:  $w = 10 + 4(0) = 10 \text{ rad/s}$
- Aceleración angular:  $\alpha = 4 \text{ rad/s}^2$

$$\alpha = 4 \text{ rad/s}^2 \text{ (cote)}$$

$$\text{Para } t_0 = 0 \text{ s} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \theta_0 = 5 \text{ rad} \\ w_0 = 10 \text{ rad/s} \\ \alpha = 4 \text{ rad/s}^2 \end{array} \right\} \text{respuestas}$$

$$t_1 = 3 \text{ s} \Rightarrow \theta_1 = 5 + 10(3) + 2(3)^2$$

$$\theta_1 = 53 \text{ rad}$$

$$w_1 = 10 + 4(3)$$

$$w_1 = 22 \text{ rad/s}$$

$$\alpha_1 = 4 \text{ rad/s}^2$$

--

## ROTACIÓN DE SISTEMAS DE MASAS PUNTUALES

**Ejercicio 2.1.9.** Una varilla delgada de 1m de largo tiene una masa despreciable. Se colocan cinco cuerpos a lo largo de ella cada uno con una masa de 1 kg, y situados a 0 cm, 25 cm, 50 cm, 75 cm y 100 cm de cada uno de sus extremos. Determinar el momento de inercia del sistema con respecto a un eje perpendicular a la varilla, el cual pasa a través de:

- Un extremo.
- La segunda masa.
- El centro de masa.
- Calcular el radio de giro en cada caso. Verificar el teorema de Steiner.

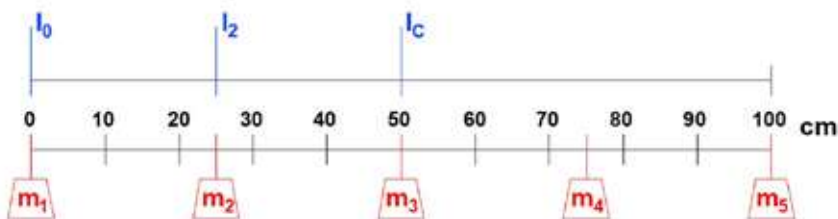


Figura 2.6. Inercia de una varilla con 5 cuerpos en ella.

Datos:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 1 \text{ kg}$$

**Resolución (a):**

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \\ &= m_1(0)^2 + m_2(0,25)^2 + m_3(0,5)^2 + m_4(0,75)^2 + m_5(1)^2 \\ &= 1(0,25)^2 + 1(0,5)^2 + 1(0,75)^2 + 1(1)^2 \\ &= 1,875 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} K_0 &= \sqrt{\frac{I_0}{M}} \\ &= \sqrt{\frac{1,875}{5}} \\ &= 0,61 \text{ m} \end{aligned}$$

**Resolución (b):**

$$\begin{aligned} I_2 &= 1(0,25)^2 + 1(0)^2 + 1(0,25)^2 + 1(0,5)^2 + 1(0,75)^2 \\ &= 0,9375 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} K_2 &= \sqrt{\frac{0,9375}{5}} \\ &= 0,433 \text{ m} \end{aligned}$$

$$I_3 = 1(0,5)^2 + 1(0,25)^2 + 1(0)^2 + 1(0,25)^2 + 1(0,5)^2$$

$$I_C = I_3 = 0,625 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow \text{Resp (c)}$$

$$K_3 = \sqrt{\frac{0,625}{5}} \Rightarrow K_3 = 0,353 \Rightarrow \text{Resp (c)}$$

Verificando el Teorema de Steiner:

$$I' = I_{CM} + MR^2$$

$$I_0 = I_{CM} + M_T R_0^2 = 0,625 + 5(0,5)^2$$

$$I_0 = 1,875 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_2 = I_{CM} + M R_2^2 = 0,625 + 5(0,25)^2$$

$$I_2 = 0,9375 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Ejercicio 2.1.10.** Tres masas, cada uno de 2 kg, están situados en los vértices de un triángulo equilátero cuyos lados miden 10 m. Determinar el momento de inercia del sistema y su radio de giro con respecto a un eje perpendicular al plano determinado por el triángulo y que pase a través de:

a. Un vértice.



b. Del punto medio de uno de sus lados.

c. Del centro de masa.

Datos:

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$M = 3 \times 2 \text{ kg} = 6 \text{ kg}$$

Realizamos un gráfico:

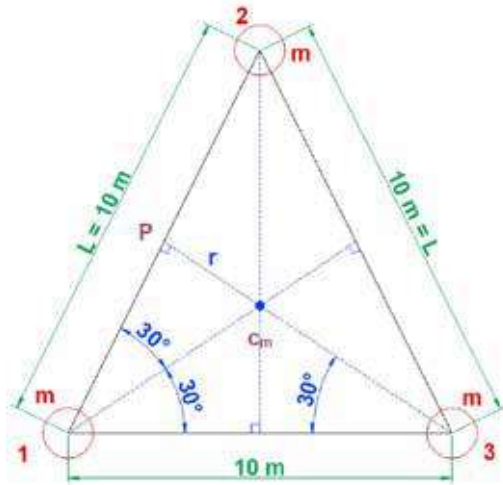


Figura 2.7. Inercia en un triángulo con masas en cada vértice.

Geometría de la figura:

$$\tan 30^\circ = \frac{r}{\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$r = 5 \text{ m} \tan 30^\circ$$

$$r = 2,8868 \text{ m}$$

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{(2,8868)^2 + (5)^2}$$

$$R = 5,77 \text{ m}$$

**Resolución (a):** Respecto al vértice (1):

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_1^3 m_i \cdot r_i^2 = m(0)^2 + m L^2 + m L^2 \\ &= 2 m L^2 \\ &= 2 (2 \text{ kg}) (10 \text{ m}^2) \Rightarrow I_1 \\ &= 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

**Resolución (b):** Respecto al punto medio:

$$\begin{aligned} I_p &= m \left( \frac{L}{2} \right)^2 + m \left( \frac{L}{2} \right)^2 + m(r + R)^2 \\ &= 2 (2) (5)^2 + 2(2,8868 + 5,774)^2 \\ &= 250 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

**Resolución (c):** Respecto al centro de masa:

$$\begin{aligned} I_{CM} &= mR^2 + m(R)^2 + m(R)^2 \\ &= 3 (2) (5,774)^2 \\ &= 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

**Radio de giro (K):**

- a)  $K_1 = \sqrt{\frac{I_1}{M}} = \sqrt{\frac{400}{6}} \Rightarrow K_1 = 8,16 \text{ m}$
- b)  $K_p = \sqrt{\frac{I_p}{M}} = \sqrt{\frac{250}{6}} \Rightarrow K_1 = 6,46 \text{ m}$
- c)  $K_{CM} = \sqrt{\frac{I_{CM}}{M}} = \sqrt{\frac{200}{6}} \Rightarrow K_1 = 5,77 \text{ m}$

## RELACIONES ENTRE CANTIDADES ANGULARES Y LINEALES

**Ejercicio 2.1.11.** Un carro de carreras viaja sobre una pista circular de 250 m de radio. Si el auto se mueve con una velocidad lineal constante de 45 m/s. determinar:

- Su velocidad angular.
- La magnitud y dirección de su aceleración.

Datos:

$$R = 250 \text{ m}$$

$$v = 45 \text{ m/s}$$

**Resolución (a):** Aplicando la relación entre velocidades se tiene que  $v = R\omega$ , de dónde despejando  $\omega$  se tiene que:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{v}{R} \\ &= \frac{45}{250} \\ &= 0,18 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

**Resolución (b):** La magnitud y dirección de su aceleración estará dada por:

$$\begin{aligned}\vec{a}_T &= a_T + a_R \\ &= R\alpha + a_R\end{aligned}$$

de donde,

$$a = a_R = \frac{v^2}{R} = \frac{(45 \text{ m/s})^2}{250 \text{ m}}$$

$$a = 8,1 \text{ m/s}^2$$

Dirigido al centro de curvatura, perpendicular a la velocidad lineal como muestra la figura adjunta.

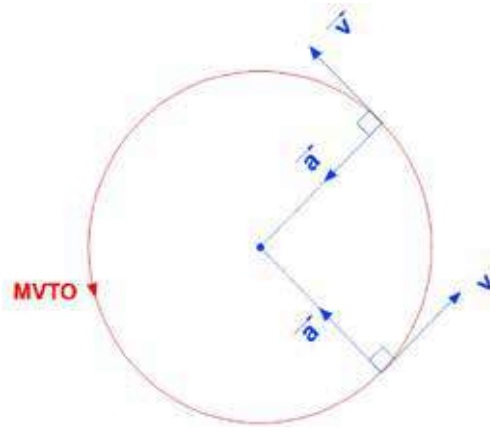


Figura 2.8. Movimiento de un carro sobre una pista circular.

**Ejercicio 2.1.12.** Un bloque de 6 kg se suelta desde la posición A sobre una pista sin fricción, como la mostrada en la Fig. 2.9 Determinar, las componentes radial y tangencial de la aceleración del bloque en el punto P.

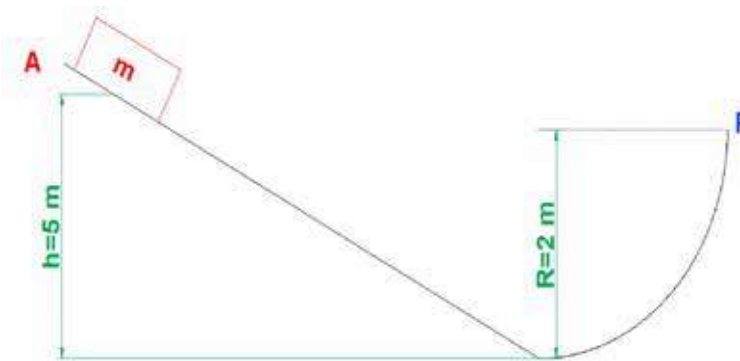


Figura 2.9. Deslizamiento de un bloque por una pista.

Datos:

$$m = 6 \text{ kg}$$

$$v_A = 0 \text{ (suelta)}$$

Sin fricción

Resolución: La masa realizaría un M.C.U.V.R entre O y P.

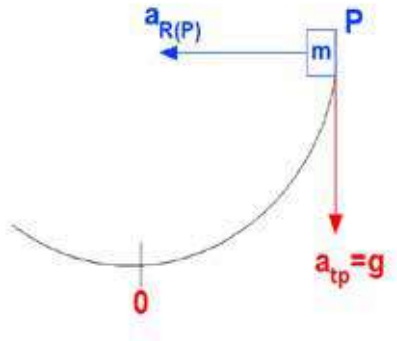


Figura 2.10. Movimiento circular uniformemente variado entre dos puntos.

$$a_{T(p)} = g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$a_{R(p)} = \frac{v_p^2}{R}$$

Aplicamos la conservación de energía entre A y P:

$$EM_A = EM_P$$

$$\cancel{EC_A} + EPg_A = EC_P + EPg_P$$

$$EC_P = EPg_A - EPg_P$$

$$m g h_A - m g h_P = \frac{1}{2} m v_P^2 \Rightarrow$$

$$v_P^2 = 2g(h_A - h_P) = 2(9,8)(5 - 2) = 58,8 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_P = \sqrt{58,8} = v_p = 7,67 \text{ m/s en}$$

$$a_{R(p)} = \frac{58,8}{2} = a_{Rcp} = 29,4 \text{ m/s}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{T(p)} = 9,8 \text{ m/s}^2 \\ a_{R(p)} = 29,4 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\} \text{ Respuestas}$$

## ENERGÍA ROTACIONAL

**Ejercicio 2.1.13.** Una lata de sopa tiene una masa de 215 g, una altura de 10,8 cm y su diámetro es de 6,38 cm, se coloca en reposo sobre la parte superior de una pendiente que mide 3 m de largo y  $25^\circ$  con la horizontal. Con métodos de energía, calcule el momento de inercia de la lata si tarda 1,50 s en alcanzar el pie de la pendiente.

Datos:

$$m = 0,215 \text{ kg}$$

$$h_1 = 10,8 \text{ cm}$$

$$\emptyset = 6,38 \text{ cm}$$

$$r = 0,0319 \text{ m}$$

$$L_{OA} = 3 \text{ m}$$

$$\theta = 25^\circ$$

$$t_{OA} = 1,50 \text{ s}$$

**Resolución:** Realizamos un gráfico.

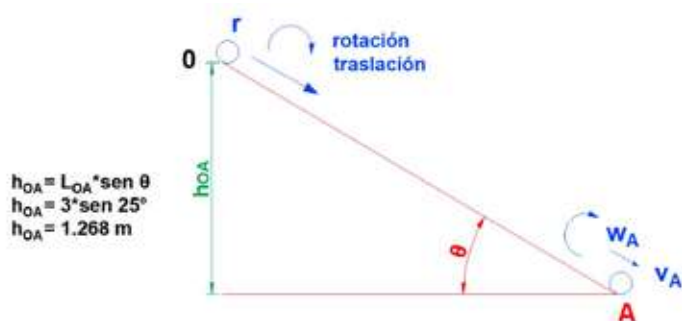


Figura 2.11. Movimiento de una lata al descender por una pendiente.

Aplicamos la ecuación (5.18): conservación de la energía para sistemas en donde existe

traslación y rotación a la vez:

$$\begin{aligned} EM_{(O)}^{(t)} + EM_{(O)}^{(r)} &= EM^{(t)} + EM^{(r)} \\ EC_O^{(t)} + EPg_O^{(t)} + EC_O^{(t)} &= EC_{(A)}^{(t)} + EPg_{(A)}^{(t)} + EC_{(A)}^{(r)} \\ m \cdot g \cdot h_{OA} &= \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I \omega_A^2 \\ m \cdot g \cdot h_{OA} &= \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_A^2}{r^2} \end{aligned}$$

de dónde se tiene que,

$$I = \frac{2 \cdot r^2}{v_A^2} \left( m \cdot g \cdot h_{OA} - \frac{1}{2} m v_A^2 \right)$$

Con cinemática: O-A: M.R.U.V.A,  $v_A^2 = v_O^2 + 2 a \cdot L_{OA}$ , despejando la aceleración:

$$a = \frac{v_A^2}{2 \cdot L_{OA}}$$

Ahora, de la ecuación  $v_A = v_0 + a \cdot t_{OA}$ , despejando la aceleración:

$$a = \frac{v_A}{t_{OA}}$$

Igualando ambas ecuaciones de la aceleración, se puede obtener la velocidad

$$\frac{v_A^2}{2 \cdot L_{OA}} = \frac{v_A}{t_{OA}}$$

de dónde,

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{2 L_{OA}}{t_{OA}} \\ &= \frac{2 (3 \text{ m})}{1,5 \text{ s}} \\ &= 4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2(0,0319)^2}{(4)^2} \left[ 0,215 (9,8) (1,268) - \frac{1}{2} (0,215) (4)^2 \right] \\ &= 1,21 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

## TORQUE O MOMENTO DE TORSIÓN

**Ejercicio 2.1.14.** Determine el torque o momento de torsión neto sobre la rueda de la Fig. 2.12 alrededor de un eje que pase por "O" perpendicular a la rueda que se encuentra en el plano x y, si  $a = 10 \text{ cm}$  y  $b = 25 \text{ cm}$ .

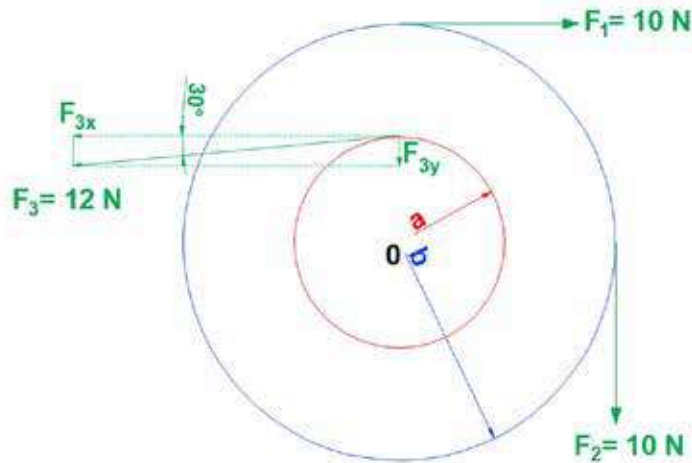


Figura 2.12. Torque producido sobre una rueda.

Datos:

$$a = 0,10 \text{ m}$$

$$b = 0,25 \text{ m}$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 30^\circ$$

$$F_{3x} = 12 \cos 30^\circ$$

$$F_{3x} = 10,4 \text{ N}$$

$$F_{3y} = 12 \sin 30^\circ$$

$$F_{3y} = 6 \text{ N}$$



**Resolución:**

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \sum^{+\infty} \tau_0 \\ &= -F_1 \cdot b - F_2 \cdot b + F_{3x}(a) + F_{3y}(0) \\ &= -10(0,25) - 9(0,25) + 10,4(0,10) \\ &= -3,711 \text{ Nm}\end{aligned}$$

Como vector:

$$\vec{\tau}_0 = (-3,711 \vec{k}) \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (eje } z, \text{ hacia adentro)}$$

**Ejercicio 2.1.15.** ¿Cuál es la magnitud y dirección del torque ( $\vec{\tau}$ ) alrededor del origen sobre una partícula ubicada en las coordenadas (0, -4 m, 3 m)? Debido a:

- Una fuerza  $\vec{F}_1$  con componentes  $F_{1x} = 2 \text{ N}$  y  $F_{1y} = F_{1z} = 0$
- La fuerza  $\vec{F}_2$  con componentes  $F_{2x} = 0$ ,  $F_{2y} = 2 \text{ N}$  y  $F_{2z} = 4 \text{ N}$

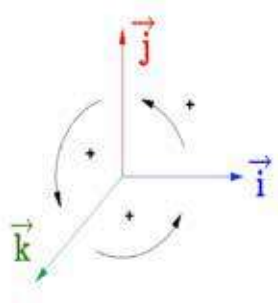


Figura 2.13. Torque producido por una partícula en un plano.

Datos:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (0\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}) \text{ m} \\ \vec{F}_1 &= (2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}) \text{ N} \\ \vec{F}_2 &= (0\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) \text{ N}\end{aligned}$$

**Resolución (a):**

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau}_1 &= \vec{r} \times \vec{F}_1 \\
 &= (-4\vec{j} + 3\vec{k}) \times (2\vec{i}) \\
 &= (-4)(2)(\vec{j} \times \vec{i}) + (3)(2)(\vec{k} \times \vec{i}) \\
 &= -8(-\vec{k}) + 6(\vec{j}) \\
 &= (0\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}) \text{ Nm}
 \end{aligned}$$

**Resolución (b):** Se realiza un gráfico que ilustre la aplicación de la fuerza en la partícula y el torque que produce:

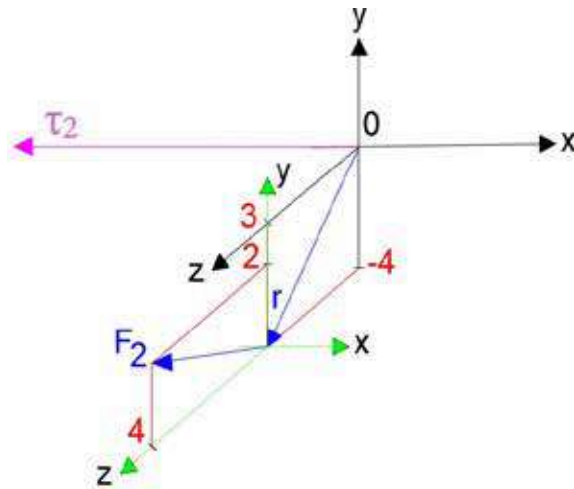


Figura 2.14. Torque producido por la aplicación de la fuerza en la partícula.

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau}_2 &= \vec{r} \times \vec{F}_2 \\
 &= (-4\vec{j} + 3\vec{k}) \times (2\vec{j} + 4\vec{k}) \\
 &= (-4)(2)(\cancel{\vec{j} \times \vec{j}}) + (-4)(4)\left(\overset{\nearrow}{\vec{j}} \times \vec{k}\right) + (3)(2)\left(\overset{\nearrow}{\vec{k}} \times \vec{j}\right) + (3)(4)(\cancel{\vec{k} \times \vec{k}}) \\
 &= -16\vec{i} - 6\vec{i} \Rightarrow \vec{\tau}_2 \\
 &= (-22\vec{i}) \text{ Nm}
 \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.16.** La fuerza  $\vec{F} = (-8\vec{i} + 6\vec{j})$  N actúa sobre una partícula con vector posición  $\vec{r} = (3\vec{i} + 4\vec{j})$  m cuales son:

- El torque que actúa sobre la partícula alrededor del origen.
- El ángulo entre las direcciones  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$

Datos:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= (-8\vec{i} + 6\vec{j}) \text{ N} \\
 \vec{r} &= (3\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ m}
 \end{aligned}$$

**Resolución (a):** Aplicamos definición de torca o torque:

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \text{ (Producto cruz)} \\
 &= (3\vec{i} + 4\vec{j}) \times (-8\vec{i} + 6\vec{j}) \\
 &= (3)(-8)(\cancel{\vec{i} \times \vec{i}}) + (3)(6)\left(\overset{\nearrow}{\vec{i}} \times \vec{j}\right) + (4)(-8)\left(\overset{\nearrow}{\vec{j}} \times \vec{i}\right) + (4)(6)(\cancel{\vec{j} \times \vec{j}}) \\
 &= 18\vec{k} - 32(-\vec{k}) = 18\vec{k} + 32\vec{k} \\
 &= (50\vec{k}) \text{ Nm}
 \end{aligned}$$

**Resolución (b):** Aplicamos el producto punto:

$$\begin{aligned}
 \vec{r} \cdot \vec{F} &= r F \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{F}}{r \cdot F} \\
 &= (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (-8\vec{i} + 6\vec{j}) \\
 &= (3)(-8) \left( \overset{\nearrow 1}{\vec{i}} \cdot \overset{\nearrow 1}{\vec{i}} \right) + (3)(6) \left( \cancel{\vec{i} \cdot \vec{j}} \right) + (4)(-8) \left( \cancel{\vec{j} \cdot \vec{i}} \right) + (4)(6) \left( \overset{\nearrow 1}{\vec{j}} \cdot \overset{\nearrow 1}{\vec{j}} \right) \\
 &= -24 + 24 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

de donde se tiene que  $\cos \theta = \frac{0}{r \cdot F} = 0$ , por lo que

$$\theta = \cos^{-1}(0) = 0$$

**Ejercicio 2.1.17.** Un auto de 1 000 kg tiene cuatro ruedas de 10 kg. Cuando el auto está en movimiento, ¿qué fracción de la energía cinética total del auto se debe a la rotación de las ruedas alrededor de sus ejes? Supóngase que las ruedas tienen la misma inercia rotacional que discos uniformes de la misma masa y tamaño.

Datos:

$$m_{TOTAL} = 1\,000 \text{ kg}$$

$$m_N = 10 \text{ kg [4 neumaticos]}$$

→ MVTO

$$I_N = I_{DISCO} = \frac{1}{2} m N R^2$$

$$\text{como } v = R\omega$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 EC_{TOTAL} &= \frac{1}{2} m_{TOTAL} v^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_{TOTAL} (R\omega)^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_{TOTAL} R^2 \omega^2
 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{EC^{(r)}}{EC_{TOTAL}} &= \frac{m_N R^2 \omega^2}{\frac{1}{2} m_{TOTAL} R^2 \omega^2} \\ &= \frac{10 \text{ kg}}{\frac{1}{2} (1\,000 \text{ kg})} \\ &= \frac{1}{50}\end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.18.** Una esfera sólida uniforme rueda hacia abajo por un plano inclinado determinar:

- ¿Cuál debe ser el ángulo de plano inclinado si la aceleración lineal del centro de masa de la esfera debe tener una magnitud de  $0,10 \text{ g}$ ?
- Si un bloque sin fricción se desliza hacia abajo por el plano inclinado a ese ángulo, la magnitud de la aceleración ¿Sería más, menos o igual a  $0,10 \text{ g}$ ? ¿Por qué?

Datos:

$$a_{CM} = 0,10 \text{ g}$$

**Resolución (a):** La esfera realiza dos movimientos uno de traslación y otro de rotación así, calculamos el  $\angle \Theta$ , para que únicamente deslice (traslación) sin rotar.

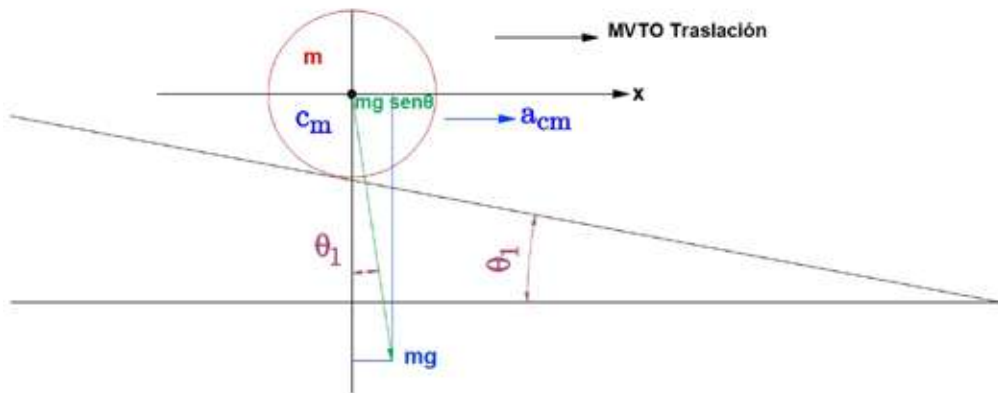


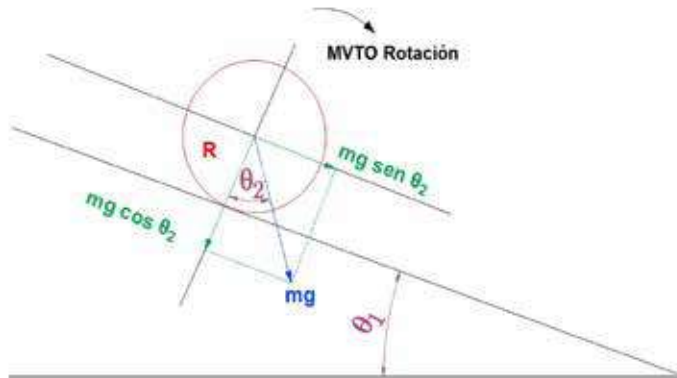
Figura 2.15. Movimiento de una esfera al rodar hacia abajo.

$$\sum \vec{F}_x = m a_{CM}$$

$$m g \sin \theta_1 = m (0,10 \text{ g})$$

$$\sin \theta_1 = 0,10 \Rightarrow \theta_1 = \sin^{-1}(0,10) \Rightarrow \theta_1 = 5,74^\circ$$

Ahora calculamos el ángulo para que la esfera únicamente rote (sin deslizar).



$$I_{ESFERA} = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\tau = I \alpha$$

$$m g \sin \theta_2 (R) = \frac{2}{5} m R^2 \left( \frac{a}{R} \right)$$

$$g \sin \theta_2 = \frac{2}{5} (0,10 \text{ g})$$

$$\sin \theta_2 = 0,04 \Rightarrow$$

$$\theta_2 = \sin^{-1}(0,04) \Rightarrow \theta_2 = 2,29^\circ$$

Si consideramos los MVTOS. Simultáneos de traslación y rotación el ángulo total sería:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1 + \theta_2 \\ &= 5,74^\circ + 2,29^\circ \\ &= 8^\circ \end{aligned}$$

**Resolución (b):** Si fuese un bloque que se deslice sin rozamiento con un ángulo  $\theta = 8^\circ$

$$m g \sin \theta = m a \Rightarrow a = g \sin 8^\circ = 0,14 \text{ g}$$

$$a = 0,14 \text{ g} \text{ sera mayor que } (0,1 \text{ g}) \Rightarrow \text{Resp (b)}$$

**Ejercicio 2.1.19.** Una pelota sólida arranca desde el reposo en el extremo superior de la pista que se muestra en la figura 6.16 y rueda sin resbalar hasta que sale por el extremo derecho si  $H = 6 \text{ m}$  y  $h = 2 \text{ m}$  y la pista es horizontal en el extremo derecho. ¿A qué distancia horizontal desde el punto A caerá la pelota en el piso?

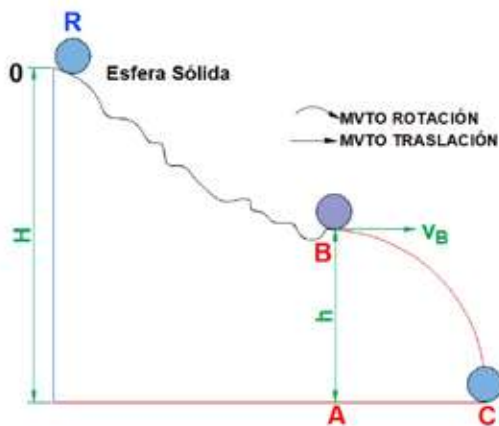


Figura 2.16. Movimiento de una pelota que desciende desde la parte alta de una pista.

Datos:

$$H = 6 \text{ m}$$

$$h = 2 \text{ m}$$

**Resolución:** En BC se tiene un movimiento parabólico, por lo que el eje  $x$  se encuentra en movimiento rectilíneo uniforme, así  $x_{AC} = v_B \cdot t_{BC}$ , por lo tanto  $h = v_{By} t_{BC} + \frac{1}{2} g t_{BC}^2$ , despejando el tiempo:

$$\begin{aligned} t_{BC} &= \sqrt{\frac{2(2)}{9,8}} \\ &= 0,639 \text{ s} \end{aligned}$$

Aplicamos la conservación de la energía entre O y B:

$$\begin{aligned}
 EM_O &= EM_B \\
 m g (H - h) &= \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 \\
 m g (6 - 2) &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} m R^2 \right) \left( \frac{v^2}{R^2} \right) + \frac{1}{2} m v^2 \\
 4 (9,8) &= \frac{1}{5} v_B^2 + \frac{1}{2} v_B^2
 \end{aligned}$$

de dónde despejando  $v_b$  se obtiene que  $v_b = 7,48 \text{ m/s}$ , por último:

$$\begin{aligned}
 x_{AC} &= 7,48 (0,639) \\
 &= 4,78
 \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.20.** Un cilindro sólido de radio 10 cm y masa 12 kg arranca desde el reposo y rueda, sin resbalar, una distancia, de 6 m al bajar por el techo de una casa inclinada a  $30^\circ$  (véase la Fig. 2.17).

- ¿Cuál es la velocidad angular del cilindro alrededor de su centro cuando sale del techo de la casa?
- El borde del techo está a 5 m de altura. Horizontalmente ¿a qué distancia del borde del techo llega el cilindro a nivel del suelo?

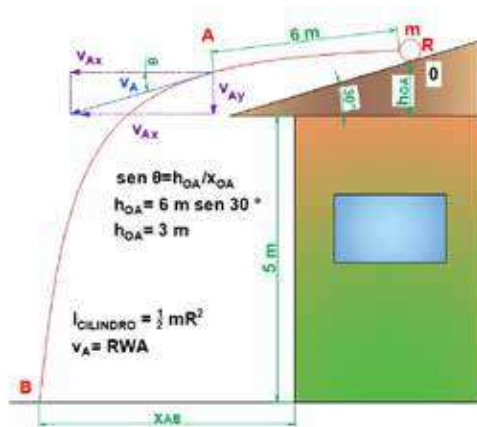


Figura 2.17. Movimiento de un cilindro al descender por el techo de una casa.



Datos:

$$R = 10 \text{ cm}$$

$$m = 12 \text{ kg}$$

$$A_{OA} = 6 \text{ m}$$

$$\theta = 30^\circ$$

**Resolución (a):** Aplicando la conservación de la energía entre “O” y “A”:

$$EM_O = EM_A \therefore$$

$$m g h_{OA} = EC_A^{(r)} + EC_A^{(t)}$$

$$m g h_{OA} = \frac{1}{2} I w_A^2 + \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$m g h_{OA} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m R^2 \right) w_A^2 + \frac{1}{2} m R^2 w_A^2$$

$$g h_{OA} = w_A^2 \left( \frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{2} R^2 \right)$$

de dónde,

$$w_A = 62,6 \text{ rad/s}$$

$$v_A = R w_A = 0,1 \text{ m} (62,6 \text{ rad/s}) \Rightarrow v_A = 6,26 \text{ m/s}$$

$$v_{Ax} = v_A \cos \theta = 6,26 \cos 30^\circ = 5,42 \text{ m/s}$$

$$v_{Ay} = v_A \sin \theta = 6,26 \sin 30^\circ = 3,13 \text{ m/s}$$

AB: MVTO. PARABÓLICO: X: M.R.U.

$$x_{AB} = v_{Ax} \cdot t_{AB}$$

Y: M.R.U.V.A:  $y_{AB} = v_{Ay} t_{AB} + \frac{1}{2} g t_{AB}^2 \Rightarrow$

$$4,9 t_{AB}^2 + 3,13 t_{AB} - 5 = 0 \Rightarrow t_{AB1} = 0,74 \text{ s}$$

$$x_{AB} = 5,42 \text{ m/s} (0,74 \text{ s})$$

$$x_{AB} = 4 \text{ m}$$

## MOMENTO ANGULAR ( $\vec{l}$ ) O CANTIDAD DE MVTO ANGULAR

**Ejercicio 2.1.21.** Dos objetos se mueven como se indica en la figura 6.18 ¿Cuál es el momento angular total de ambos alrededor del punto O?

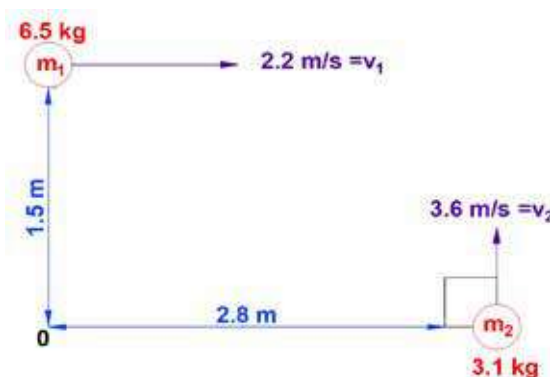


Figura 2.18. Movimiento de dos objetos por el espacio.

Datos:

$$m_1 = 6,5 \text{ kg}$$

$$\vec{v}_1 = (2, 2 \vec{i}) \text{ m/s}$$

$$\vec{r}_1 = (1, 5 \vec{j}) \text{ m}$$

$$m_2 = 3,1 \text{ kg}$$

$$\vec{v}_2 = (3, 6 \vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{r}_2 = (2, 8 \vec{i}) \text{ m}$$

**Resolución:**

$$\vec{l} = \text{Momento angular}$$

$$\vec{l}_0 = \sum \vec{l}_i = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$$

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{\rho}_i \text{ (Producto } \rightarrow \text{ cruz)}$$

$$\vec{r} = \text{Posición partícula respecto al punto de giro[m]}$$

$$\vec{\rho}_i = \text{Cantidad de MVTO lineal} = m \vec{v}$$

de dónde,

$$\begin{aligned}\vec{l}_0 &= \vec{r}_1 \times \vec{\rho}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{\rho}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 \\ &= \left[ 1,5 \vec{j} \times 6,5 \left( 2,2 \vec{i} \right) + 2,8 \vec{i} \times 3,1 \left( 3,6 \vec{j} \right) \right] \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \\ &= 21,45 \left( \vec{j} \times \vec{i} \right) + 31,248 \left( \vec{i} \times \vec{j} \right) \\ &= 21,45 \left( -\vec{k} \right) + 31,248 \left( \vec{k} \right) \\ &= \left( 9,8 \vec{k} \right) \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}\end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.22.** En un cierto tiempo un objeto de 0,25 kg tiene un vector de posición dado por  $\vec{r} = \left( 2\vec{i} - 2\vec{k} \right) \text{ m}$ . En ese instante su velocidad en metros por segundos está dada por  $\vec{v} = \left( 5\vec{i} + 5\vec{k} \right) \text{ m/s}$  y la fuerza en newtons que actúa sobre él es  $\vec{F} = 4\vec{j} \text{ N}$

- ¿Cuál es el momentum angular del objeto alrededor del origen?
- ¿Cuál es el torque que actúa sobre él?

Datos:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \left( 2\vec{i} - 2\vec{k} \right) \text{ m} \\ \vec{v} &= \left( 5\vec{i} + 5\vec{k} \right) \text{ m/s}\end{aligned}$$

$$m = 0,25 \text{ kg}$$

$$\vec{F} = \left( 4\vec{j} \right) \text{ N}$$

**Resolución (a):** Aplicamos el concepto de momento angular  $\left( \vec{l}_0 \right)$ , se sabe que  $\vec{l}_0 = \vec{r} \times \vec{\rho}$ , además  $\vec{\rho} = m\vec{v}$ , por lo que:

$$\begin{aligned}\vec{l}_0 &= \vec{r} \times m\vec{v} = \left( 2\vec{i} - 2\vec{k} \right) \times 0,25 \left( 5\vec{i} + 5\vec{k} \right) \\ &= \left( 2\vec{i} - 2\vec{k} \right) \times \left( 1,25\vec{i} + 1,25\vec{k} \right) \Rightarrow \\ &= 2(1,25) \left( \vec{i} \times \vec{i} \right) + (2)(1,25) \left( \vec{i} \times \vec{k} \right) + (-2)(1,25) \left( \vec{k} \times \vec{i} \right) + \\ &\quad (-2)(1,25) \left( \vec{k} \times \vec{k} \right) \\ &= -2,5\vec{j} - 2,5\vec{j} \Rightarrow \vec{l}_0 = \left( -5\vec{j} \right) \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}\end{aligned}$$

**Resolución (b):** El torque estará dado por:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_0 &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= (2\vec{i} - 2\vec{k}) \times (4\vec{j}) = 2(4) \left( \vec{i} \times \vec{j} \right) + (-2)(4) \left( \vec{k} \times \vec{j} \right) \\ &= 8\vec{k} + 8\vec{i} \Rightarrow \vec{\tau}_0 = (8\vec{i} + 8\vec{k}) \text{ Nm}\end{aligned}$$

## SEGUNDA LEY DE NEWTON EN FORMA ANGULAR

**Ejercicio 2.1.23.** Una partícula de 3 kg con velocidad  $\vec{v} = (5\vec{i} - 6\vec{j})$  m/s está en  $x = 3$  m,  $y = 8$  m. La jala una fuerza de 7 N en la dirección  $x$  negativa.

- ¿Cuál es el momentum angular de la partícula alrededor del origen?
- ¿Cuál es el torque alrededor del origen que actúa sobre la partícula?
- ¿Con qué rapidez cambia el momentum angular de la partícula con el tiempo?

Datos:

$$m = 3 \text{ kg}$$

$$\vec{v} = (5\vec{i} - 6\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{r}_0 = (3\vec{i} + 8\vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{F} = (-7\vec{i}) \text{ N}$$

**Resolución (a):** Aplicamos la definición de momento angular:

$$\begin{aligned}\vec{l}_0 &= \vec{r}_0 \times \vec{p} \Rightarrow \\ &= \vec{r}_0 \times m\vec{v} \\ &= (3\vec{i} + 8\vec{j}) \times (15\vec{i} - 18\vec{j}) \\ &= 3(15) \left( \vec{i} \times \vec{i} \right) + 3(-18) \left( \vec{i} \times \vec{j} \right) + 8(15) \left( \vec{j} \times \vec{i} \right) + 8(-18) \left( \vec{j} \times \vec{j} \right) \\ &= -54\vec{k} + 120(-\vec{k}) \\ &= (-174\vec{k}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}\end{aligned}$$

**Resolución (b):** Aplicamos una de las definiciones de torca  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  de dónde:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_0 &= (3\vec{i} + 8\vec{j}) \times (-7\vec{i}) \\ &= 3(-7) \left( \vec{i} \times \vec{i} \right) + (8)(-7) \left( \vec{j} \times \vec{i} \right) \\ &= (56\vec{k}) \text{ Nm}\end{aligned}$$

**Resolución (c):** Aplicamos la definición de la segunda ley de Newton en forma angular:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \frac{d\vec{L}}{dt} \\ &= (56\vec{k}) \text{ Nm}\end{aligned}$$

### CONSERVACIÓN DE MOMENTO ANGULAR

**Ejercicio 2.1.24.** Un hombre está de pie sobre una plataforma que está girando (sin fricción) con una rapidez angular de 1,2 rev/s con sus brazos extendidos y sostiene un ladrillo en cada mano. La inercia rotacional del sistema formado por el hombre, los ladrillos y la plataforma alrededor del eje central es  $6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , si al mover los ladrillos el hombre reduce la inercia rotacional del sistema a  $2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

- ¿Cuál es la velocidad angular resultante de la plataforma?
- ¿Cuál es la razón entre la nueva energía cinética del sistema y la energía cinética original?
- ¿Qué proporcionó la energía cinética agregada?

Datos:

$$w_0 = 1,2 \frac{\text{rev}}{\text{s}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}$$

$$w_0 = 7,54 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$I_0 = 6 \text{ kg m}^2$$

$$I_F = 2 \text{ kg m}^2$$

**Resolución (a):** Aplicamos el principio de la conservación de la cantidad del momento angular:  $l_0 = l_f$ , aplicando además la definición de momento angular ( $l$ ) de acuerdo a la ecuación

$l = I\omega$ , de dónde  $I_0\omega_0 = I_F \cdot \omega_F$ , despejando  $\omega_F$ :

$$\begin{aligned}\omega_F &= \frac{I_0\omega_0}{I_F} \\ &= \frac{6(7,54\text{rad/s})}{2} \\ &= 22,62\frac{\text{rad}}{\text{s}} \times \frac{\text{rev}}{2\pi\text{rad}} \\ &= 3,6\frac{\text{rev}}{\text{s}}\end{aligned}$$

**Resolución (b):** La energía cinética estará dada por:

$$\begin{aligned}EC_O^r &= \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 \\ &= \frac{1}{2}(6)(7,54)^2 \\ &= 170,6\text{ J} \\ EC_F^r &= \frac{1}{2}I_F(\omega_F)^2 \\ &= \frac{1}{2}(2)(22,62)^2 \\ &= 511,7\text{ J} \\ \frac{EC_F^r}{EC_O^r} &= \frac{511,6\text{ J}}{170,6\text{ J}} \\ &= 3,0\end{aligned}$$

**Resolución (c):** Al mover los ladrillos hacia adentro, las fuerzas sobre ellos desde el brazo transforman energía, de energía interna del hombre a energía cinética.

**Ejercicio 2.1.25.** Una rueda montada en un eje tiene un momento de inercia de  $10\text{ kg} \cdot \text{m}^2$  y se encuentra girando a  $1\,800\text{ rpm}$ , la rueda es frenada uniformemente y llega a detenerse luego de  $10\text{ s}$ . Determinar:

- La aceleración angular de la rueda.
- El módulo del torque aplicado para frenar la rueda.

Datos:

$$I = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$w_0 = 1\,800 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$$

$$1\,800 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}}$$

$$w_0 = 188,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$w_F = 0$$

$$t_{OF} = 10 \text{ s}$$

**Resolución (a):** La rueda describe al frenar uniformemente: M.C.U.V.R por lo que  $w_F = w_0 - \alpha \cdot t_{OF}$ , de dónde:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{w_0}{t_{OF}} \\ &= \frac{188,5}{10} \\ &= 18,85 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\end{aligned}$$

**Resolución (b):**

$$\begin{aligned}\tau &= I\alpha \\ &= 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \left( 18,85 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) \\ &= 188,5 \text{ Nm}\end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.26.** Una polea de 50 cm de diámetro y 20 kg de masa esta, montada sobre un eje horizontal sin fricción. Se suspende mediante una cuerda enrollada en su borde un bloque de 500 g, y al soltarla este desciende 3 m en 2 s. Determinar:

- La aceleración del bloque.
- El radio de giro de la polea.

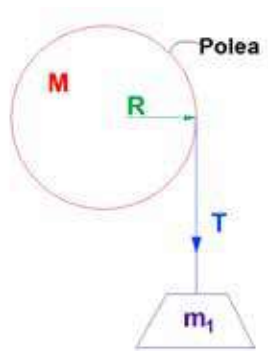


Figura 2.19. Movimiento de un bloque al caer por una polea.

Datos:

$$\emptyset = 50 \text{ cm} \Rightarrow R = 0,25 \text{ m}$$

$$m = 20 \text{ kg}$$

$$m_1 = 500 \text{ g} = 0,5 \text{ kg}$$

$$y_{0A} = 3 \text{ m}$$

$$t_{0A} = 2 \text{ s}$$

**Resolución (a):** Aplicamos cinemática (traslación): OA: M.R.U.V.A, de dónde se tiene que

$$y_{0A} = v_0 \cdot t_{0A} + \frac{1}{2} a t_{0A}^2, \text{ despejando la aceleración:}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{2 \cdot y_{0A}}{t_{0A}^2} \\ &= \frac{2(3)}{(2)^2} \\ &= 1,5 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

**Resolución (b):** Se tiene que  $k = \sqrt{\frac{I}{M}}$ . Realizamos el diagrama del cuerpo libre polea (M) y masa ( $m_1$ ):



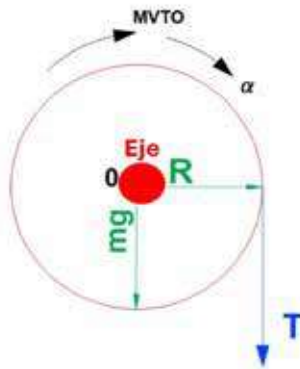


Figura 2.20. Diagrama de cuerpo libre de la polea.

Se sabe que:

$$\sum \tau_0^+ = I\alpha$$

$$T \cdot R = I\alpha$$

de dónde se tiene que:

$$I = \frac{T \cdot R}{\alpha}$$

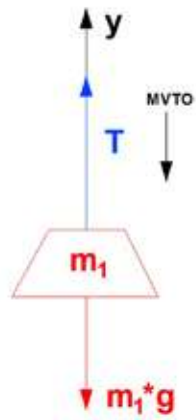


Figura 2.21. Diagrama de cuerpo libre de la masa.

$$\begin{aligned} \downarrow + \\ MVTO \quad \sum Fy = m \cdot ay \\ m_1g - T = m_1 \cdot a \end{aligned}$$

despejando  $T$ :

$$\begin{aligned} T &= m_1 \cdot g - m_1 \cdot a \\ &= 0,5 (9,8 - 1,5) \\ &= 4,15 \text{ N} \end{aligned}$$

Despejando  $\alpha$  de la ecuación  $a = R\alpha$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{R} \\ &= \frac{1,5 \text{ m/s}^2}{0,25 \text{ m}} \\ &= 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Por último se tiene que:

$$I = \frac{4,15(0,25)}{6} = 0,1729 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$k = \sqrt{\frac{0,1729 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{20 \text{ kg}}} = 0,093$$

**Ejercicio 2.1.27.** Dos masas  $m_1 = 6 \text{ kg}$  y  $m_2 = 10 \text{ kg}$  están unidas mediante un hilo delgado que pasa por una polea de  $40 \text{ cm}$  de diámetro y tiene un momento de inercia de  $5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , despreciando la masa del hilo y la fricción en el apoyo de la polea. Determinar:

- La aceleración de cada masa.
- La tensión en la cuerda, en los lados que unen con  $m_1$  y  $m_2$ .

Datos:

$$m_1 = 6 \text{ kg}$$

$$m_2 = 10 \text{ kg}$$

$$\emptyset = 40 \text{ cm}$$

$$R = 0,20 \text{ m}$$

$$I_{\text{polea}} = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Resolución (a):** Realizamos el diagrama del cuerpo libre.

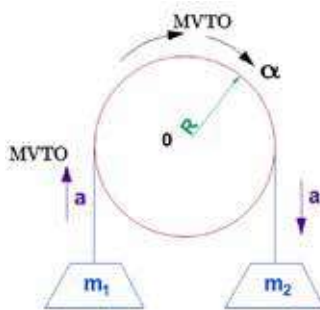


Figura 2.22. Diagrama de cuerpo libre de las poleas junto con las masas.

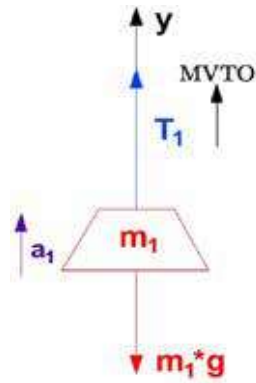


Figura 2.23. Diagrama de cuerpo libre de la masa izquierda.

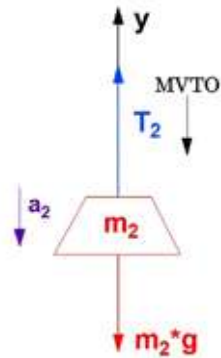


Figura 2.24. Diagrama de cuerpo libre de la masa derecha.

A partir de la Fig. 2.23 se tiene que:

$$\sum_{\uparrow}^{+} Fy = m \cdot ay$$

$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$

despejando  $T_1$ :

$$\begin{aligned} T_1 &= 6(9,8) + 6a \\ &= 58,8 + 6a \end{aligned}$$

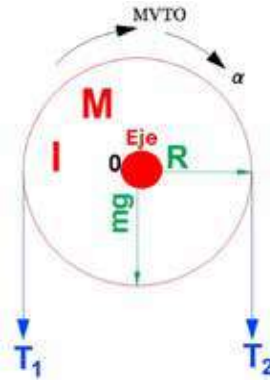


Figura 2.25. Diagrama de cuerpo libre de la polea con relación a las masas.

En la Fig.2.24 se tiene que:

$$\begin{aligned} \overset{+}{\downarrow} \sum_{MVTO} Fy &= m \cdot ay \\ m_2 g - T_2 &= m_2 a \end{aligned}$$

de dónde  $T_2 = 98 - 10a$

En la Fig. 2.25 se tiene que:

$$\begin{aligned} \overset{+}{\curvearrowright} \sum_{MVTO} \tau_0 &= I\alpha \\ T_2 \cdot R - T_1 R &= I\alpha \\ T_2 - T_1 &= \frac{5}{0,2} \cdot \frac{a}{R} \\ T_2 - T_1 &= 125a \end{aligned}$$

De las tres ecuaciones anteriores se tiene que:

$$98 - 10a - 58,8 - 6a = 125a$$

$$141a = 39,2$$

$$a = \frac{39,2}{141}$$

$$a = 0,278 \text{ m/s}^2$$

**Resolución (b):**

$$T_1 = 58,8 + 6(0,278) = 60,5 \text{ N}$$

$$T_2 = 98 - 10(0,278) = 95,2 \text{ N}$$

**Ejercicio 2.1.28.** Un cuerpo de 12 kg se encuentra en un plano inclinado, como se muestra en la Fig. 2.26. El cuerpo está atado a una cuerda delgada que esta enrollada a un cilindro homogéneo de 5 kg de masa y 20 cm de radio y que puede girar alrededor de su centro "O". Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado es  $\mu = 0,2$  y el sistema se mueve partiendo del reposo. Calcular la aceleración del cuerpo de masa 12 kg y la tensión en la cuerda.

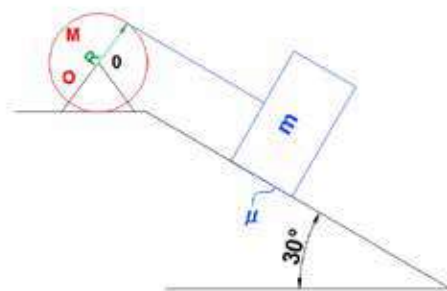


Figura 2.26. Movimiento de un cuerpo atado a un cilindro por un plano inclinado.

Datos:

$$m = 12 \text{ kg}$$

$$M = 5 \text{ kg}$$

$$R = 0,2 \text{ m}$$

$$\mu = 0,20$$

$$v_0 = 0 \text{ (Reposo)}$$

**Resolución:** Realizamos el diagrama del cuerpo libre.

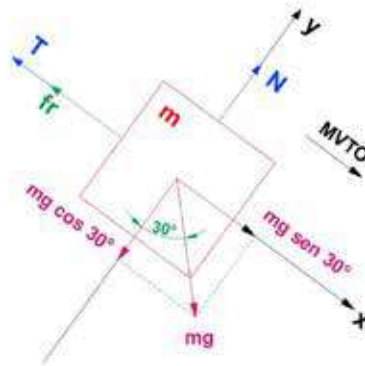


Figura 2.27. Diagrama de cuerpo libre de la masa del cuerpo.

$$\overset{+}{\searrow} \sum^{MVT0} Fx = m \cdot ax$$

$$m g \sen 30^\circ - T - fr = m a$$

$$fr = \mu \cdot N$$

$$\overset{+}{\nearrow} \sum Fy = 0 \Rightarrow N - m g \cos 30^\circ = 0$$

$$N = 12 (9,8) \cos 30^\circ = 101,84 \text{ N}$$

$$\overset{+}{\downarrow} \sum^{MVT0} Fy = m \cdot ay$$

$$fr = 0,2 (101,84) = 20,4 \text{ N}$$

Luego:

$$\begin{aligned} T &= 12(9,8) \sin 30^\circ - 20,4 - 12a \\ &= 38,4 - 12a \end{aligned}$$

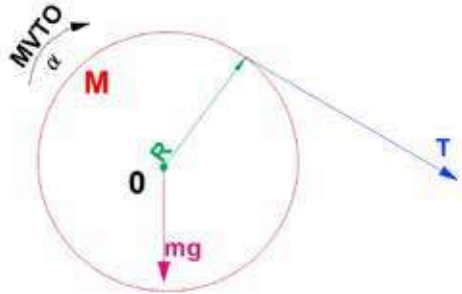


Figura 2.28. Diagrama de cuerpo libre del cilindro.

En la Fig. 2.28, se tiene que  $\curvearrowright_{MVTO}^+ \sum \tau_0 = I\alpha$ , despejando  $T$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{I}{R} \cdot \frac{a}{R} \\ &= \frac{1}{2}MR^2 \frac{a}{R^2} \\ &= \frac{1}{2}Ma \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(5)a &= 38,4 - 12a \\ 2,5a + 12a &= 38,4 \end{aligned}$$

despejando  $a$ , se tiene

$$\begin{aligned} a &= \frac{38,4}{14,5} \\ &= 2,65 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



**Ejercicio 2.1.29.** Dos niños cada uno con una masa de 25 kg están sentados en extremos opuestos de una plancha horizontal de 2,6 m de largo y 10 kg de masa, la plancha está rotando en un plano horizontal ( $xz$ ) a 5 rpm, con respecto a un eje perpendicular (eje  $y$ ) que pasa por su centro. Determinar:

- La velocidad angular del sistema si cada niño se mueve 60 cm hacia el centro de la plancha sin tocar el piso.
- ¿Cuál es el cambio de la energía cinética de rotación del sistema?

**Resolución (a):** Posición inicial MVTO:

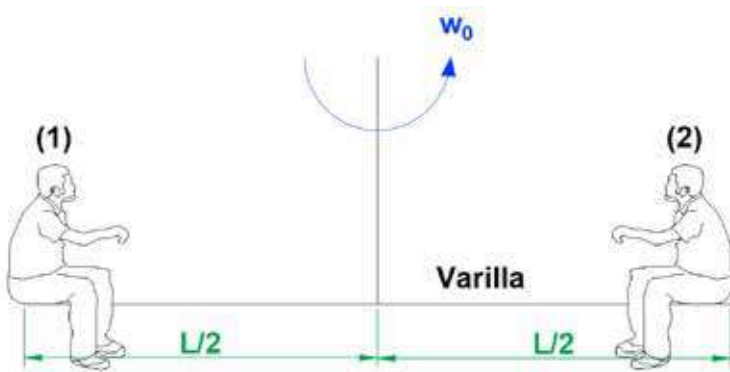


Figura 2.29. Niños sentados sobre una plancha horizontal.

Datos:

$$m_1 = m_2 = 25 \text{ kg}$$

$$m_{\text{varilla}} = 10 \text{ kg}$$

$$L_0 = 2,6 \text{ m}$$

$$w_0 = 5 \text{ rpm}$$

$$w_0 = 0,5236 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Resolución:

Aplicamos la ecuación de la conservación de la cantidad de MVTO. angular:

$$L_0 = L_F$$

$$I_0 \cdot w_0 = I_F \cdot w_F$$

$$w_F = \frac{I_0}{I_F} w_0$$

se sabe que:

$$\begin{aligned} I_0 &= I_{\text{varilla}} + I_1 + I_2 \\ &= \frac{1}{12} m L^2 + m_1 \left( \frac{L}{2} \right)^2 + m_2 \left( \frac{L}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} (10) (2,6)^2 + 2 (25) (1,3)^2 \\ &= 90,13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Posición final:

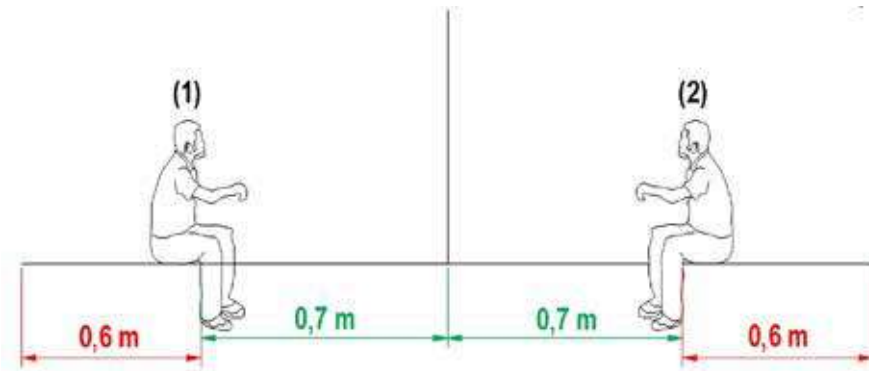


Figura 2.30. Distancias entre los niños sentados sobre una plancha.

$$\begin{aligned} I_F &= I_v + I_1' + I_2' \\ &= \frac{1}{12} m L^2 + 2 m_1 (0,7)^2 \\ &= 30,13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} w_F &= \frac{90,13}{30,13} (0,5236) \\ &= 1,56 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

**Resolución (b):** El cambio de la energía cinética en el sistema estará dado por:

$$\begin{aligned} \Delta E_C^{(r)} &= \Delta E_F^{(r)} - \Delta E_O^{(r)} \\ &= \frac{1}{2} I_F w_F^2 - \frac{1}{2} I_O w_O^2 \\ &= \frac{1}{2} (30,13) (1,566)^2 - \frac{1}{2} (90,13) (0,5236)^2 \\ &= 24,6 \text{ J} \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.30.** En la Fig. 2.31, se muestra una masa ( $m$ ) de 12 kg suspendida de dos cuerdas una enrollada alrededor de un cilindro o tambor de 0,10 m de radio y 0,05 kg·m<sup>2</sup> de momento de inercia, y la otra arrollada alrededor de un tambor de 0,15 m de radio y momento de inercia de 0,12 kg·m<sup>2</sup>. La masa se suelta desde el reposo y desciende a una altura  $h = 6\text{m}$ . Despreciando la fricción y utilizando métodos de conservación de la energía. Determinar:

- La velocidad final de la masa en descenso.
- Su aceleración lineal.
- La aceleración angular de ambos cilindros.
- La tensión en una y otra cuerda.

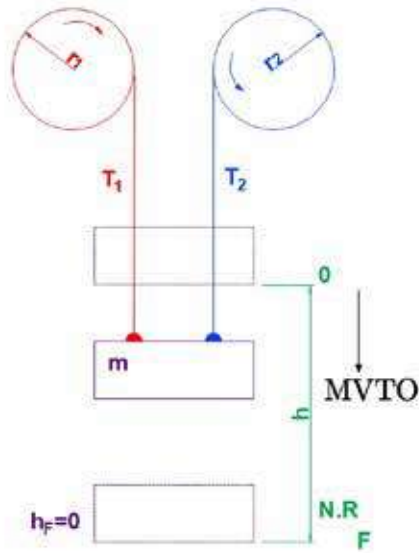


Figura 2.31. Movimiento de una masa suspendida de dos cuerdas.

Datos:

$$m = 12 \text{ kg}$$

$$r_1 = 0,10 \text{ m}$$

$$I_1 = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$r_2 = 0,15 \text{ m}$$

$$I_2 = 0,12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$h = 6 \text{ m}$$

**Resolución (a):** Aplicamos conservación de la energía entre O y F, para el sistema de la figura 2.31:

$$EM_O = EM_F$$

$$\cancel{EC}_O^{(t)} + \cancel{EC}_O^{(r)} + EP_O^{(t)} = EC_F^{(t)} + EC_F^{(r)} + EP_F^{(t)}$$

$$m g h = \frac{1}{2} m v_F^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_{F1}^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_{F2}^2$$

$$m g h = \frac{1}{2} m v_F^2 + \frac{1}{2} I_1 \frac{v_F^2}{r_1^2} + \frac{1}{2} I_2 \frac{v_F^2}{r_2^2}$$

$$m g h = \frac{1}{2} v_F^2 \left( m + \frac{I_1}{r_1^2} + \frac{I_2}{r_2^2} \right)$$

$$v_F = \sqrt{\frac{2 m g h}{\left( m + \frac{I_1}{r_1^2} + \frac{I_2}{r_2^2} \right)}}$$

$$v_F = 7,94 \text{ m/s}$$

**Resolución (b):** Con cinemática: OF : M.R.U.V.A se tiene que  $v_F^2 = v_0^2 + 2 a h$ , despejando

$a$ :

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{2 h} \\ &= \frac{(7,94)^2}{2 (6)} \\ &= 5,25 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

**Resolución (c):** Se sabe que  $a = \alpha_1 \cdot r_1$ , de dónde:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a}{r_1} \\ &= \frac{5,27}{0,10} \\ &= 52,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

también,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{a}{r_2} = \frac{5,25}{0,15} \\ &= 35,10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

**Resolución (d):**

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{\alpha_1 \cdot I_1}{r_1} \\&= 26,33 \text{ N}\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}T_2 &= \frac{\alpha_2 I_2}{r_2} \\&= 28,08 \text{ N}\end{aligned}$$

## 2.2. Ejercicios propuestos

**Ejercicio 2.2.1.** *Cuál es la velocidad angular en radianes por segundo de:*

- a. *La tierra en su órbita alrededor del sol.*
- b. *La luna en su órbita alrededor de la tierra.*

**Respuestas:**      a)  $1,99 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$       b)  $2,66 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$

**Ejercicio 2.2.2.** *Un motor eléctrico que hace girar una rueda de molienda a 100 rev/min se apaga. Suponiendo aceleración angular constante negativa de  $2 \text{ rad/s}^2$  de magnitud.*

- a. *¿Cuánto tarda la rueda en detenerse?*
- b. *¿Cuántos radianes gira durante el tiempo encontrado en a)?*

**Respuestas:**      a) 5,236 s      b) 27,4 radianes

**Ejercicio 2.2.3.** *Una rueda rotatoria requiere 3 s para girar 37 rev. Su velocidad angular al final del intervalo de 3 s es  $98 \text{ rad/s}$ . ¿Cuál es la aceleración angular constante?*

**Respuesta:**       $6,83 \text{ rad/s}^2$

**Ejercicio 2.2.4.** *Un auto acelera uniformemente desde el reposo y alcanza la velocidad de 22 m/s en 9 s. Si el diámetro de la llanta es de 58 cm. Encuentre:*

- a. *El número de revoluciones que la llanta realiza durante este movimiento, si se supone que no hay deslizamiento.*
- b. *¿Cuál es la velocidad rotacional final de una llanta en revoluciones por segundo?*

**Respuestas:**      a) 54,85 revoluciones      b) 12,07 rev/s

**Ejercicio 2.2.5.** *Una rueda de 2 m de diámetro gira con una aceleración angular constante de  $4 \text{ rad/s}^2$ . La rueda empieza su movimiento desde el reposo en  $t = 0$ , y el radio del vector en el punto P sobre el borde de la rueda forma un ángulo de  $57,3^\circ$  con la horizontal en este tiempo. En  $t = 2 \text{ s}$ , encuentre:*

- a. *La velocidad angular de la rueda.*
- b. *La velocidad y aceleración lineales del punto P.*
- c. *La posición del punto P.*

**Respuestas:**      a)  $8 \text{ rad/s}$       b)  $8 \text{ m/s}$ ;  $64,11 \text{ m/s}^2$       c)  $9 \text{ rad}$

**Ejercicio 2.2.6.** Las cuatro partículas de la Fig. 2.32 están conectadas por medio de barras de masa despreciable. El origen está en el centro del rectángulo. Si el sistema gira en el plano  $x$  y en torno del eje  $z$  con una velocidad angular de  $6 \text{ rad/s}$ , Calcule el momento de inercia del sistema en torno del eje  $z$ .

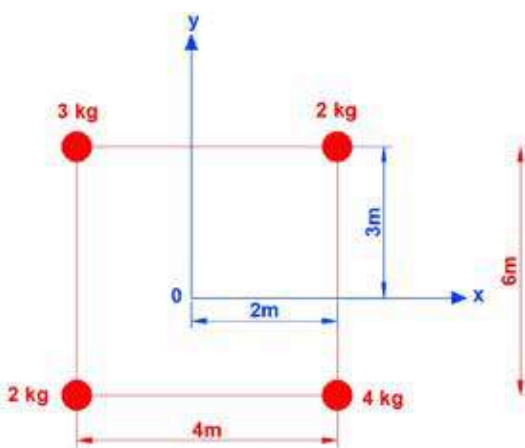


Figura 2.32. Dimensiones entre las partículas conectadas entre sí.

**Respuesta:**  $1,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Ejercicio 2.2.7.** El centro de masa de una pelota de béisbol lanzada (radio =  $3,8 \text{ m}$ ) se mueve a  $38 \text{ m/s}$ . La pelota gira en torno de un eje que atraviesa su centro de masa con una velocidad angular de  $125 \text{ rad/s}$ . Determine la fracción entre la energía cinética rotacional y la energía cinética traslacional. Considere la pelota como una esfera uniforme.

**Respuesta:**  $0,0156$

**Ejercicio 2.2.8.** Tres partículas están conectadas por medio de barras rígidas de masa despreciable a lo largo del eje  $y$  y Fig. 2.33. Si el sistema gira entorno del eje  $x$  con una velocidad angular de  $2 \text{ rad/s}$ , encuentre:

- El momento de inercia alrededor del eje  $x$  y la energía rotacional total evaluada a partir de  $\frac{1}{2} I \omega^2$
- La velocidad lineal de cada partícula y la energía total evaluada a partir de  $\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$



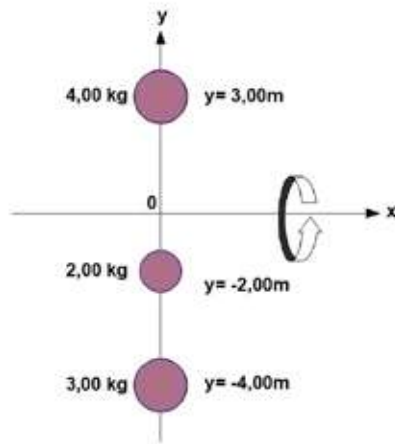


Figura 2.33. Dimensiones de las partículas en el eje Y.

**Respuestas:**      a)  $92 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $184 \text{ J}$       b)  $6 \text{ m/s}$ ;  $184 \text{ J}$

**Ejercicio 2.2.9.** Con el teorema de ejes paralelos encuentre los momentos de inercia de:

- Un cilindro sólido alrededor de un eje paralelo al eje del centro de masa y que pase por el borde del cilindro.
- Una esfera sólida alrededor de un eje tangente a su superficie.

**Respuestas:**      a)  $I = \frac{3MR^2}{2}$       b)  $I = \frac{7MR^2}{5}$

**Ejercicio 2.2.10.** Encuentre la masa  $m$  necesaria para equilibrar la camioneta de  $1\,500 \text{ kg}$  sobre la pendiente mostrada en la Fig. 2.34. Suponga que todas las poleas son sin fricción y sin masa.

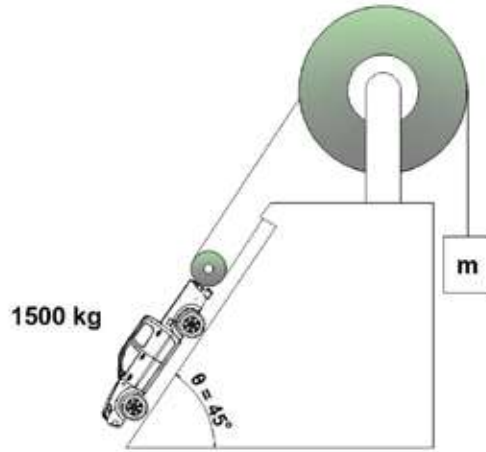


Figura 2.34. Camioneta suspendida por una polea con un bloque de contrapeso.

**Respuesta:** 54,06 kg

**Ejercicio 2.2.11.** Un bloque de masa  $m_1 = 2$  kg y uno de masa  $m_2 = 6$  kg se conectan por medio de una cuerda sin masa sobre una polea que tiene la forma de un disco con radio  $R = 0,25$  m y masa  $M = 10$  kg. De la misma forma, se permite que los bloques se muevan sobre un bloque fijo en forma de cuña con un ángulo de  $30^\circ$  como muestra la Fig. 2.35. El coeficiente de fricción cinético es 0,36 para ambos bloques. Determine:

- La aceleración de los bloques.
- La tensión de la cuerda.

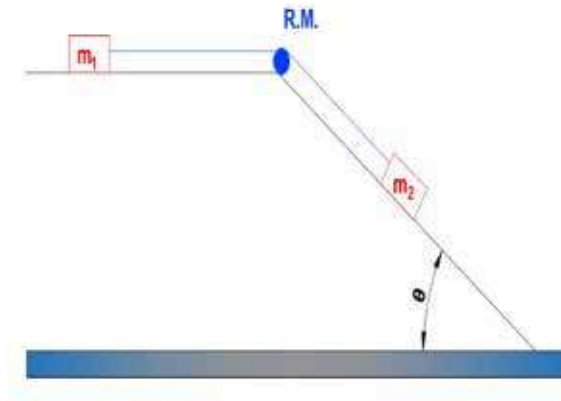


Figura 2.35. Movimiento de dos bloques conectados por una polea.

**Respuestas:**      a)  $0,309 \text{ m/s}^2$       b)  $7,67 \text{ N}$  y  $9,22 \text{ N}$

**Ejercicio 2.2.12.** Una masa de  $15 \text{ kg}$  y una de  $10 \text{ kg}$  están suspendidas por una polea que tiene un radio de  $10 \text{ cm}$  y una masa de  $3 \text{ kg}$  (Fig. 2.36). La cuerda tiene una masa despreciable y hace que la polea gire sin deslizar. La polea gira sin fricción, las masas inician su movimiento a desde del reposo cuando la distancia entre ellas es de  $3 \text{ m}$ . Trate a la polea como un disco uniforme, y determine la velocidad de cada una de las masas cuando pasan en la misma posición.

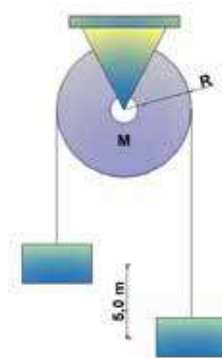


Figura 2.36. Masas suspendidas por medio de una polea.

**Respuesta:** 5,77 m/s

**Ejercicio 2.2.13.** Un bloque de peso de 50 N se une al extremo libre de una cuerda (se desprecia su masa) enrollada en el borde de una polea de 0,250 m de radio y de masa (3 kg). La polea fija solo puede girar libremente en un plano vertical en torno del eje horizontal que pasa por su centro. El bloque que se libra 6 m sobre el piso. Determine:

- La aceleración del sistema, la tensión que se ejerce sobre la cuerda y la rapidez con la que el bloque golpea el piso.
- La velocidad calculada anteriormente empleando el principio de la conservación de la energía.

**Respuestas:** a) 7,575 m/s<sup>2</sup>; 11,36 N; 9,54 m/s      b) 9,54 m/s

**Ejercicio 2.2.14.** Una rueda de molienda tiene la forma de un disco sólido uniforme de 7 cm de radio y 2 kg de masa. Empieza a moverse desde el reposo y acelera uniformemente bajo la acción del momento de torsión constante de 0,600 N·m que el motor ejerce sobre la rueda.

- ¿Cuánto tarda la rueda en alcanzar su velocidad final de 1200 rev/min?
- ¿Cuántas revoluciones efectúa mientras se acelera?

**Respuestas:** a) 1,03 s      b) 10,34 revoluciones.

**Ejercicio 2.2.15.** Los bloques mostrados en la Fig. 2.37 están unidos entre sí por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea de radio  $R = 0,250$  m y momento de inercia  $I$ . El cuerpo sobre el plano inclinado sin rozamiento se mueve hacia arriba con una aceleración constante de magnitud  $a = 2$  m/s<sup>2</sup>. Determine:

- Encuentre las tensiones en los dos lados de la cuerda.
- Encuentro el momento de inercia de la polea.

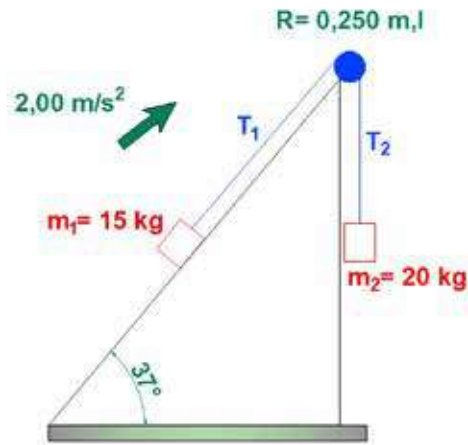


Figura 2.37. Diagrama de cuerpo libre de dos masas unidas por una polea.

**Respuestas:** a) 118,3 N y 156,2 N b) 1,1875  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$

**Ejercicio 2.2.16.** La polea que se muestra en la Fig. 2.38 tiene un radio  $R$  y un momento de inercia  $I$ . Un extremo de la masa  $m$  está conectado a un resorte de constante de la fuerza  $k$ , y el otro está unido a una cuerda enrollada alrededor de la polea. El eje de la polea y la pendiente son sin fricción. Si la polea está enrollada en dirección contra las manecillas del reloj de modo que alarga el resorte una distancia  $d$  a partir de su posición de equilibrio y después se suelta desde el reposo. Encuentre el valor numérico para la velocidad angular cuando el resorte está nuevamente indeformado si se conoce que:  $I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $R = 0,30 \text{ m}$ ,  $k = 50 \text{ N/m}$ ,  $m = 0,50 \text{ kg}$ ,  $d = 120 \text{ m}$ ,  $\theta = 37^\circ$

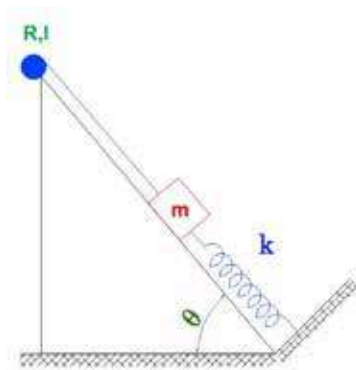


Figura 2.38. Masa unida a una polea y aun resorte.

**Respuesta:**  $0,696 \text{ rad/s}$

**Ejercicio 2.2.17.** Un cuerpo en forma cilíndrica de 22 lb de masa gira sin deslizar sobre una mesa horizontal. En el instante en que su centro de masa tiene una rapidez de 36 km/h, encuentre:

- La energía cinética de traslación de su centro de masa.
- La energía rotacional alrededor de su centro de masa.
- Su energía total.

**Respuestas:** a) 499 J      b) 250 J      c) 749 J

**Ejercicio 2.2.18.** Determine la aceleración del centro de masa de un disco sólido uniforme que rueda hacia abajo por un plano inclinado y compare esta aceleración con la de un aro uniforme. ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción necesario para mantener el movimiento de rodamiento puro del disco?

**Respuestas:** Aceleración del disco:  $a = \frac{2}{3}g \sin \theta$ ;

Coeficiente mínimo de fricción:  $\mu_{\min} = \frac{2}{3} \tan \theta$

**Ejercicio 2.2.19.** Un disco sólido uniforme y un aro simétrico se sitúan uno frente al otro en el punto superior de un plano inclinado de altura  $h$ . Si se liberan ambos desde el reposo y ruedan sin deslizar, determine sus velocidades cuando puedan alcanzar el pie de la pendiente. ¿Qué cuerpo llega en primer lugar a la parte inferior del plano?

**Respuestas:**

a)  $v_{\text{disco}} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}, \quad v_{\text{aro}} = \sqrt{gh}$

b) El disco sólido llega primero.

**Ejercicio 2.2.20.** Una barra rígida ligera de 1 m de largo gira en el plano  $x$  y alrededor de un soporte que traspasa por el centro de la barra. Dos cuerpos de masas 4 kg y 3 kg se conectan a sus extremos. Encuentre el momento angular del sistema alrededor del origen en el instante en que la velocidad de cada partícula es de 5 m/s.

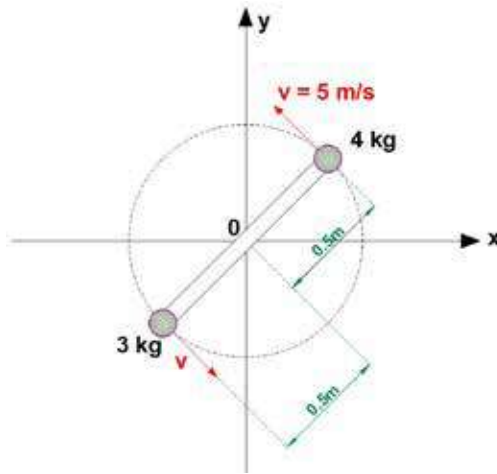


Figura 2.39. Movimiento de una barra que gira en el plano  $x$ .

**Respuesta:**  $17,5 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

**Ejercicio 2.2.21.** En un cierto instante la posición de una piedra en una honda dada por  $\vec{r} = (1, 7\vec{i}) \text{ m}$ . El momento lineal  $p$  de la piedra es  $(12\vec{i}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ . Calcule su momento angular  $I = \vec{r} \times \vec{p}$ .

**Respuesta:**  $\vec{L} = 20,4\vec{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

**Ejercicio 2.2.22.** El vector de posición de una partícula de 2 kg de masa está dado como una función del tiempo por  $\vec{r} = (6\vec{i} + 5t\vec{j}) \text{ m}$ . Determine el momento angular de la partícula como una función del tiempo.

**Respuesta:**  $\vec{L} = 60\vec{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$

**Ejercicio 2.2.23.** Un péndulo cónico consta de una plomada de masa  $m$  se encuentra en movimiento en una trayectoria circular en un plano horizontal, como se ilustra en la figura. Durante el movimiento, el alambre de soporte de longitud  $l$  mantiene un ángulo constante  $\theta$  con la vertical. Muestre que magnitud del momento angular de la plomada respecto del punto de soporte es:

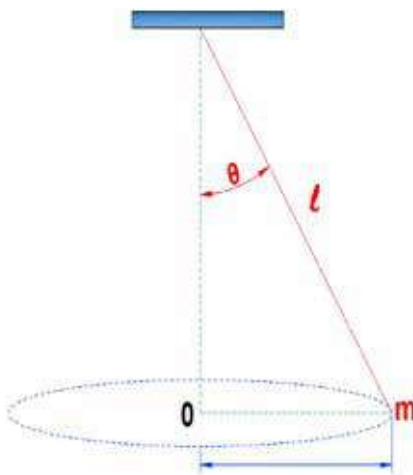


Figura 2.40. Movimiento circular de un péndulo conectado a una masa.

**Respuesta:** 
$$L = \sqrt{\frac{l^3 m^2 \sin^4 \theta g}{\cos \theta}}$$

**Ejercicio 2.2.24.** Una masa de 4 kg se une a una cuerda ligera la cual está enrollada alrededor de una polea (Fig. 2.41). La polea es un cilindro sólido uniforme de 8 cm de radio y 2 kg de masa. Determine:

- ¿Cuál es el momento de torsión neto sobre el sistema alrededor del punto O?
- Cuando la masa tiene una velocidad  $v$ , la polea tiene una velocidad angular  $\omega = v/R$ . Determine el momento angular total del sistema respecto de O.
- A partir del hecho de que  $\tau = dL/dt$  y su resultado de b) calcule la aceleración de la masa.



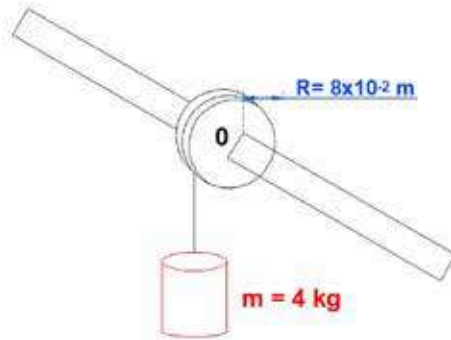


Figura 2.41. Polea cilíndrica unida a una masa.

**Respuestas:** a)  $3,136 \text{ N} \cdot \text{m}$  b)  $0,40 \text{ v}$  c)  $7,84 \text{ m/s}^2$

**Ejercicio 2.2.25.** Un disco sólido uniforme de  $3 \text{ kg}$  de masa y  $0,200 \text{ m}$  de radio gira alrededor de un eje fijo perpendicular a su cara. Si la frecuencia angular de rotación es de  $6 \text{ rad/s}$  calcule el momento angular del disco cuando el eje de rotación:

- a. Atraviesa el centro de masa
- b. Atraviesa por una posición a la mitad entre el centro de masa y el borde

**Respuestas:** a)  $0,36 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$  b)  $0,54 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

**Ejercicio 2.2.26.** Un disco sólido de masa  $M$  y radio  $R$  rota alrededor de un eje fijo perpendicular a su cara. Si la frecuencia angular de rotación es  $\omega$ , calcule el momento angular del disco cuando el eje de rotación:

- a. Pasa por su centro de masa
- b. Pasa por una posición a la mitad del centro y del borde

**Respuestas:** a)  $0,36 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$  b)  $0,54 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{ rad/s}$

**Ejercicio 2.2.27.** Una partícula de  $0,400 \text{ kg}$  de masa se une a la marca de  $100 \text{ cm}$  de una regla métrica de  $0,100 \text{ kg}$  de masa. La regla rota sobre un plano horizontal sin rozamiento con una rapidez angular de  $4 \text{ rad/s}$ . Determine el momento angular del sistema, cuando la regla se articula en torno de un eje.

- a. Que forma  $90^\circ$  con el plano horizontal y que atraviesa la marca de  $50 \text{ cm}$ .

b. Perpendicular al plano horizontal y que atraviesa la marca de 0 cm.

**Respuestas:** a)  $0,433 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{ rad/s}$  b)  $1,733 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{ rad/s}$

**Ejercicio 2.2.28.** Un cilindro para el cual el momento de inercia es  $I_1$ , gira alrededor de un eje vertical sin fricción, con velocidad angular  $\omega_0$ . Un segundo cilindro cuyo momento de inercia es  $I_2$  y que no gira al principio cae sobre el primer cilindro (Fig. 2.42). Puesto que las superficies no ofrecen fricción, en algún momento los dos discos alcanzarán la misma velocidad angular  $\omega$ .

a. Calcule  $\omega$ .

b. Muestre que se pierde energía en esta situación y calcule la proporción entre la energía rotacional final y la inicial.

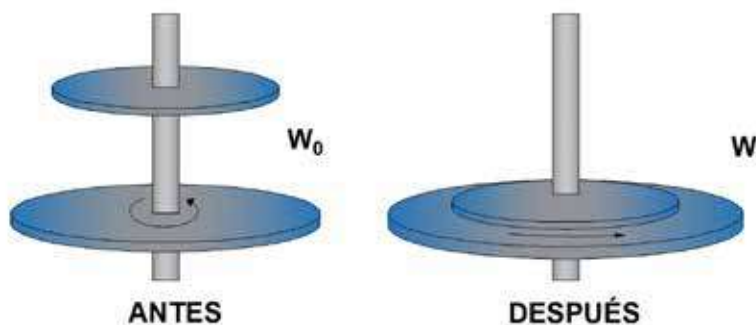


Figura 2.42. Movimiento de dos discos en un eje vertical.

**Respuestas:** a)  $\frac{I_1 \cdot \omega_0}{I_1 + I_2}$  b)  $\frac{I_1}{I_1 + I_2}$

**Ejercicio 2.2.29.** Un carrusel de radio  $R = 2 \text{ m}$  tiene un momento de inercia  $I = 250 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  y gira a  $10 \text{ rev/min}$ . Un niño de  $25 \text{ kg}$  sube de un brinco al borde del carrusel. ¿Cuál es la nueva velocidad angular del carrusel?

**Respuesta:**  $0,748 \text{ rad/s}$

**Ejercicio 2.2.30.** Una mujer de  $60 \text{ kg}$  de masa que está de pie en el borde de una mesa que puede girar horizontalmente tiene un momento de inercia de  $1\,102,5 \text{ lb} \cdot \text{m}^2$  (trabaje en el SI) y un radio de  $2,00 \text{ m}$ . El plano que inicialmente está en reposo y puede girar libremente alrededor de un eje vertical sin rozamiento que atraviesa su centro. La dama empieza a girar alrededor de la orilla en dirección de las manecillas del reloj (cuando se observa desde arriba el sistema) a una velocidad constante de  $1,50 \text{ m/s}$  con respecto a la Tierra.

- a. ¿En qué sentido y con qué velocidad angular gira la mesa giratoria?
- b. Determine el trabajo que realiza la dama para poner en movimiento la mesa giratoria

**Respuestas:** a)  $0,69 \text{ rad/s}$  (En contra de las manecillas del reloj) b)  $67,5 \text{ joules}$

**Ejercicio 2.2.31.** Una barra uniforme de  $100 \text{ g}$  de masa y  $50 \text{ cm}$  de longitud gira en un plano horizontal alrededor de un alfiler vertical fijo sin rozamiento y que atraviesa su centro. Dos pequeñas cuentas cada una de  $30 \text{ g}$  de masa, se colocan sobre la barra de tal manera que pueden moverse sin rozamiento a lo largo de su longitud. Al inicio las cuentas se fijan por medio de retenes ubicados a  $10 \text{ cm}$  a cada lado de su centro, tiempo durante el cual el sistema circula a una velocidad angular de  $20 \text{ rad/s}$ . Repentinamente los retenes se sacan y las pequeñas cuentas se deslizan en traslación saliendo de la barra. Encuentre:

- a. La velocidad angular del sistema en el tiempo en que las cuentas alcanzan los extremos de la barra.
- b. La velocidad angular de la barra después de que las cuentas han salido de ella.

**Respuestas:** a)  $9,2 \text{ rad/s}$  (En contra de las manecillas del reloj) b)  $25,76 \text{ rad/s}$

**Ejercicio 2.2.32.** El estudiante de la Fig. 2.43 sostiene dos pesas cada una de  $10 \text{ kg}$  de masa cuando sus brazos están extendidos horizontalmente las pesas están a una distancia de  $1 \text{ m}$  de rotación y el gira con una velocidad angular de  $2 \text{ rad/s}$ . El momento de inercia del estudiante más el taburete es de  $8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  y se supone que es constante si el estudiante desplaza las pesas horizontalmente a  $250 \text{ m}$  del eje de rotación calcule:

- a. La velocidad angular del sistema.
- b. El cambio de la energía mecánica de este.

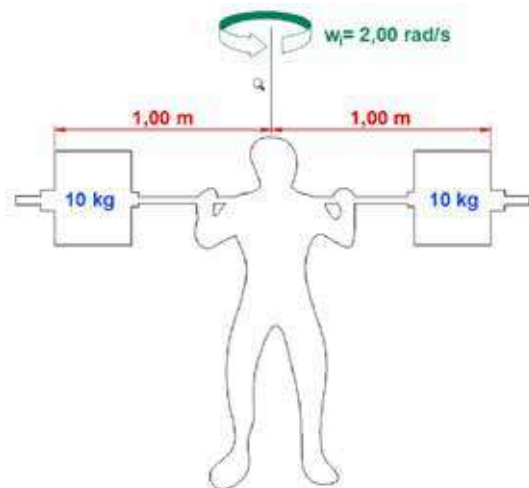


Figura 2.43. Movimiento rotacional de las pesas.

**Respuestas:** a)  $6,05 \text{ rad/s}$  b)  $113,3 \text{ joules}$

**Ejercicio 2.2.33.** Una delgada y uniforme mesa giratoria cilíndrica de 2 m de radio y 30 kg gira en un plano horizontal con una velocidad angular inicial de  $4\pi \text{ rad/s}$ . El cojinete de la mesa giratoria no ofrece fricción. Una pequeña masa de arcilla de 0,250 kg se deja caer sobre la mesa giratoria y se mantiene adherida a un punto a 1,80 m del centro de rotación. Encuentre:

- La velocidad angular final de la arcilla y la mesa giratoria (Considere la arcilla como una masa puntual).
- La energía mecánica es constante en esta colisión.

**Respuestas:** a)  $12,4 \text{ rad/s}$  b)  $4,74 \text{ kJ}$  y  $4,66 \text{ kJ}$

**Ejercicio 2.2.34.** Una fuerza horizontal constante  $F$  se aplica a un rodillo de césped que tiene la forma de un cilindro uniforme de radio  $R$  y masa  $M$  (Fig. 2.44), si el rodillo rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal demuestre que:

- La aceleración del centro de masa es  $2F/3M$ .
- El coeficiente de fricción mínimo necesario para evitar el deslizamiento es  $F/3mg$ . (Suponga, considere el momento de torsión respecto al centro de masa.)

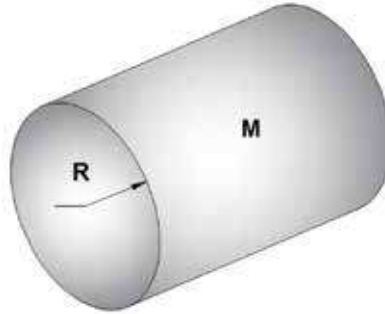


Figura 2.44. Movimiento de un rodillo al aplicarle una fuerza.

**Respuestas:**      a)  $\frac{2F}{3M}$       b)  $\frac{F}{3Mg}$

**Ejercicio 2.2.35.** Este problema describe un método para determinar el momento de inercia de forma irregular, como la carga de un satélite. La Fig. 2.45 muestra un método para determinar  $I$  en forma experimental. Una masa  $m$  está colgada de una cuerda enrollada alrededor de un eje interior (radio  $r$ ) de una mesa giratoria que soporta la objeto. Cuando la masa se suelta a partir del reposo, desciende uniformemente una distancia  $h$ , adquiriendo una velocidad  $v$ . Muestre el momento de inercia  $I$  del equipo (incluida la mesa giratoria) es  $mr^2(2gh/v^2 - 1)$

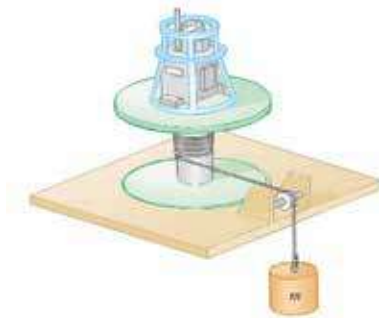


Figura 2.45. Masa colgando de una cuerda alrededor del eje interno.

**Respuesta:**       $I = mr^2 \left[ \frac{2gh}{v^2} - 1 \right]$

**Ejercicio 2.2.36.** Una bola de boliche se desliza y gira sobre una superficie horizontal de modo tal que su energía cinética rotacional es igual a su energía cinética traslacional. ¿Cuál es la proporción entre la velocidad del centro de masa de la bola y la velocidad tangencial de un punto sobre su superficie?

**Respuesta:**  $\frac{v_{CM}}{v_T} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

**Ejercicio 2.2.37.** Una masa  $m$  está unida a una cuerda que pasa por un pequeño hoyo en una superficie horizontal sin fricción (Fig. 2.46). La masa inicialmente orbita con velocidad  $v_0$  en un círculo de radio  $r_0$ . La cuerda se jala después lentamente desde abajo, disminuyendo el radio del círculo a  $r$ .

- ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando el radio es  $r$ ?
- Encuentre la tensión en la cuerda como una función de  $r$ .
- ¿Cuánto trabajo  $W$  se efectúa al mover  $m$  de  $r_0$  a  $r$ ? (Nota: la tensión depende de  $r$ .)
- Obtenga los valores numéricos para  $v$ ,  $T$  y  $W$  cuando  $r = 0,100$  m,  $m = 50$  g  $r_0 = 0,300$  m y  $v_0 = 1,50$  m/s

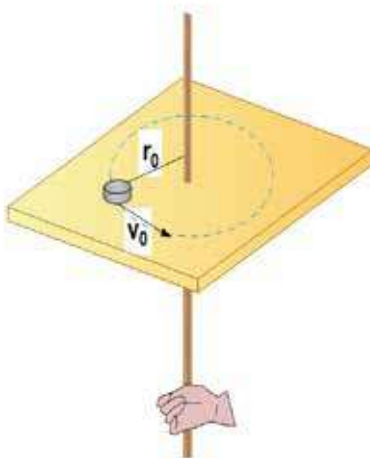


Figura 2.46. Movimiento de una masa alrededor de una cuerda en el centro.

**Respuestas:**

- La velocidad de la masa cuando el radio es  $r$  es:

$$v = \frac{r_0 v_0}{r}$$

b. La tensión en la cuerda como función de  $r$  es:

$$T(r) = m \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3}$$

c. El trabajo realizado al jalar la cuerda de  $r_0$  a  $r$  es:

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 \left( \frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right)$$

d. Para  $r = 0,100$  m,  $m = 0,050$  kg,  $r_0 = 0,300$  m y  $v_0 = 1,50$  m/s:

$$v = 4,50 \text{ m/s}, \quad T = 10,13 \text{ N}, \quad W = 0,45 \text{ J}$$

**Ejercicio 2.2.38.** Dos astronautas (Fig. 2.47) cada uno con una masa de 75 kg, están conectados por medio de una cuerda de 10 m y masa despreciable. Se encuentran aislados en el espacio, orbitando alrededor de su centro de masa a velocidades de 5 m/s. Calcule:

- La magnitud del momento angular del sistema considerando a los astronautas como partículas.
- La energía rotacional del sistema. Al jalar la cuerda los astronautas acortan la distancia entre ellos a 5 m.
- ¿Cuál es el nuevo momento angular del sistema?
- ¿Cuáles son sus nuevas velocidades?
- ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema?
- ¿Cuánto trabajo realizan los astronautas al acortar la distancia que los separa?

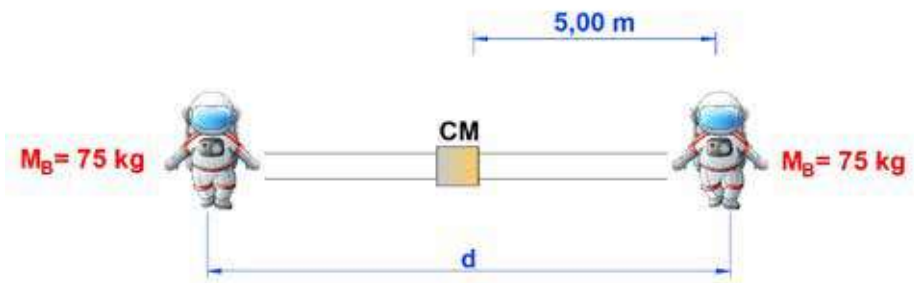


Figura 2.47. Dimensiones entre los astronautas.

**Respuestas:**

- a.  $3,75 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
- b. 1875 J
- c. 4,66 kJ
- d. 10 m/s
- e. 5 626 J

**Ejercicio 2.2.39.** Una esfera sólida se coloca en la parte superior de un plano inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Esta posición inicial de la esfera corresponde a una distancia vertical  $h$  sobre el suelo. La esfera se suelta y desciende por el plano. Calcule la velocidad de la esfera cuando alcanza el pie de la pendiente en el caso en que:

- a. Rueda sin deslizar.
- b. Se desliza sin fricción y sin rodar.
- c. Compare los tiempos que se requieren para llegar al pie de la pendiente en los casos a y b.

**Respuestas:**

- a.  $\sqrt{\frac{10}{7}gh}$
- b.  $\sqrt{2gh}$
- c. La esfera tarda más tiempo en llegar al pie de la pendiente cuando rueda sin deslizar (caso a) que cuando se desliza sin fricción (caso b)

**Ejercicio 2.2.40.** Un carrete de alambre de masa  $M$  y radio  $R$  se desenrolla con una fuerza uniforme  $F$  (Fig. 2.48). Suponga que el carrete es un cilindro macizo simétrico que no desliza. Muestre que:

- a. La aceleración del centro de masa es  $4F/3M$ .
- b. La fuerza de rozamiento es hacia la derecha y su módulo es igual a  $F/3$ .
- c. Si el cilindro inicia del reposo y gira sin deslizar, ¿Cuál es la velocidad de su centro de masa después de que ha rodado una distancia  $d$ ?



Respuesta:

$$c) v = \sqrt{\frac{4Fd}{3M}}$$

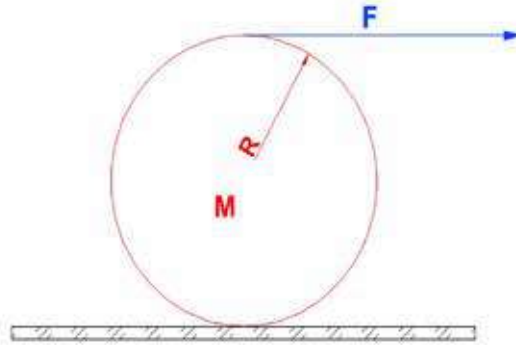


Figura 2.48. Movimiento de un carrete de alambre por una fuerza.

**Ejercicio 2.2.41.** Suponemos una rueda sólida de radio  $R$  a la cual se le da una velocidad angular  $\omega_0$  alrededor de un eje que atraviesa perpendicularmente su centro y luego se baja hasta una superficie horizontal y se suelta. Suponga también que el coeficiente de rozamiento de fricción entre la rueda y la superficie es  $\mu$ .

- Demostrar que el tiempo que transcurre en iniciar el movimiento de rodamiento puro es  $R\omega_0/3\mu g$ .
- Muestre que la distancia que se desliza el disco antes de que ocurra el movimiento de rodamiento puro es  $R^2\omega_0^2/18\mu g$ .

**Ejercicio 2.2.42.** Un gran rollo cilíndrico de papel de seda de radio inicial  $R$  se encuentra sobre una larga superficie horizontal con el extremo abierto del papel clavado sobre la superficie. Al rollo se le da un pequeño empujón ( $v_0 = 0$ ) y comienza a desenrollarse.

- Determine la velocidad del centro de masa de rollo cuando su radio ha disminuido a  $r$ .
- Calcule un valor numérico para esta velocidad en  $r = 1 \text{ mm}$ , suponiendo  $R = 6 \text{ m}$ .
- ¿Qué sucede con la energía del sistema cuando el papel se ha desenrollado completamente? (Sugerencia: Suponga que el rollo tiene una densidad uniforme y aplique métodos de energía).

Respuestas:

$$a) v_{CM} = \left[ \frac{4g(R-r)^3}{R^2+r^2} \right]^{1/2}$$

$$b) 15,34 \text{ m/s}$$

$$c) 0$$

**Ejercicio 2.2.43.** La Fig. 2.49 muestra un carrete de alambre que descansa sobre una superficie horizontal. Cuando se jala, no se desliza en la posición de contacto  $P$ . el carrete se jala en las direcciones indicadas por medio de las fuerzas vectoriales  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$ . Para cada fuerza determine el sentido en que gira el carrete. Note que la línea de acción de  $F_2$  pasa por  $P$ .

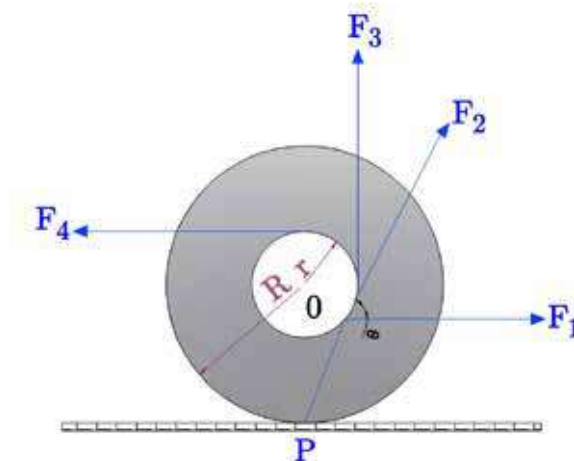


Figura 2.49. Movimiento de un carrete de alambros por distintas fuerzas.

**Ejercicio 2.2.44.** La velocidad de un automóvil aumenta de 5 km/h al 50 km/h en 8 s, el radio de sus llantas es de 45 cm. Determinar:

- La aceleración angular de los neumáticos, si la masa de cada llanta es de 30 kg y su radio de giro de 0,3 m.
- La cantidad de movimiento angular inicial y final de cada llanta

**Respuestas:** a)  $3,47 \text{ rad/s}^2$  b)  $8,33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$  y  $83,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

**Ejercicio 2.2.45.** 3 masas, cada una de 2 kg, están situadas en los vértices de un triángulo equilátero cuyos lados miden cada uno 10 cm. Calcular el momento de inercia del sistema y su radio de giro con respecto a un eje perpendicular al plano determinado por el triángulo y que pase a través de:

- Un vértice.
- Del punto medio de un lado.

c. Del centro de masa.

**Respuestas:**

a.  $I = 0,04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $R = 0,0816 \text{ m}$

b.  $I = 0,025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $R = 0,0645 \text{ m}$

c.  $I = 0,02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $R = 0,0577 \text{ m}$

**Ejercicio 2.2.46.** Encontrar el momento de inercia de la molécula de  $\text{CO}_2$  con respecto a un eje que pasa a través del centro de masa y es perpendicular al eje. La molécula es lineal y el átomo de C se encuentra en el centro. La distancia C-O es de  $113 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

**Respuesta:**  $L = 6,79 \times 10^{-42} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Ejercicio 2.2.47.** El momento de inercia de una rueda es de  $1000 \text{ lb pie}^2$ . En un cierto instante, su velocidad angular es de  $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Después que, rota 100 radianes, su velocidad angular es de  $100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calcular el torque aplicado a la rueda y el aumento en la energía cinética.

**Respuestas:**  $267,64 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  $671210 \text{ J}$

**Ejercicio 2.2.48.** El radio de una moneda de 5 centavos es de 5 cm y su masa es de 5 g. Rueda sobre un plano inclinado a 6 rps. Encontrar:

a. Su energía cinética de rotación.

b. Su energía cinética de traslación.

c. Su energía cinética total. ¿Cuál es la distancia vertical de la cual tendría que caer a fin de adquirir energía cinética?

**Respuestas:**

a.  $4,44 \times 10^{-3} \text{ J}$

b.  $8,88 \times 10^{-3} \text{ J}$

c.  $1,33 \times 10^{-2} \text{ J}$ ;  $0,271 \text{ m}$

**Ejercicio 2.2.49.** Un anillo de hierro cuyos radios miden 0,60 m y de 0,50 m tiene una masa de 18 kg. Rueda sobre un plano inclinado, llegando a la base con una velocidad de  $3,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calcular la energía cinética total y la altura vertical de la cual cae.

**Respuestas:** 215, 5 J; 1, 22 m

**Ejercicio 2.2.50.** La varilla de la Fig. 2.50 cuya longitud es  $L$  y cuya masa es  $m$ , puede rotar libremente en un plano vertical alrededor de su extremo  $a$ . Inicialmente se coloca en una posición horizontal y luego se suelta.

Cuando hace un ángulo  $\alpha$  con la vertical, calcular:

- Su aceleración angular.
- Su velocidad angular.
- Las fuerzas en el lugar de suspensión.

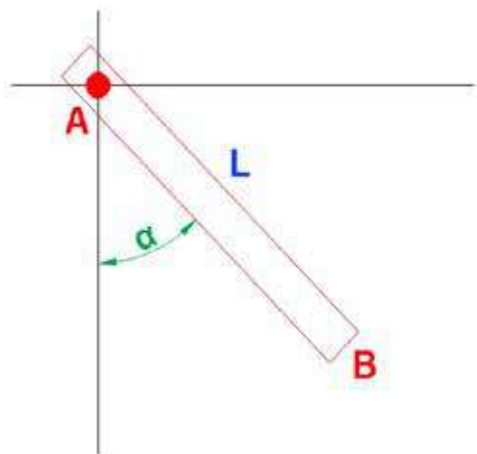


Figura 2.50. Movimiento de una varilla en un plano vertical.

**Respuestas:**

- $\alpha_{ang} = \frac{3g}{2L} \sin \alpha$
- $\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$
- $F = mg + m \frac{L}{2} \left( \frac{3g}{2L} \sin \alpha \right)^2$

**Ejercicio 2.2.51.** La rueda de la Fig. 2.51 que tiene un radio de 0,5 y una masa de 25 kg, puede girar con respecto a un eje horizontal. Una cuerda enrollada alrededor del eje tiene una masa de 10 kg, que cuelga de su extremo libre. Calcular:

- a. La aceleración angular de la rueda.
- b. La aceleración lineal del cuerpo.
- c. La tensión de la cuerda.

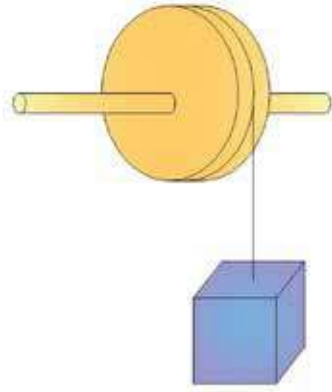


Figura 2.51. Movimiento de una rueda conectada a una masa.

**Respuestas:**

- a.  $8,73 \text{ rad/s}^2$
- b.  $4,365 \text{ m/s}^2$
- c.  $54,45 \text{ N}$

**Ejercicio 2.2.52.** Calcular la aceleración del sistema de la Fig. 2.52 si el radio de la polea es  $R$ , su masa es  $m$  y está girando debido a la fricción sobre la cuerda. En este caso  $m_1 = 50 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 200 \text{ kg}$ ,  $M = 15 \text{ kg}$  y  $R = 10 \text{ cm}$

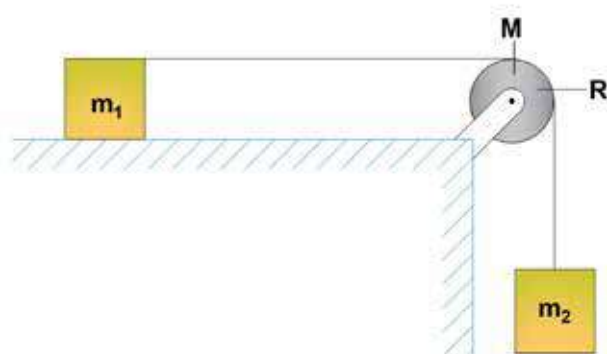


Figura 2.52. Movimiento de un sistema de una polea unida a dos masas rectangulares.

**Respuesta:**  $5,72 \text{ m/s}^2$

**Ejercicio 2.2.53.** En el sistema representado en la Fig. 2.53,  $M = 10 \text{ kg}$ ,  $m = 0,2 \text{ kg}$ ,  $r = 0,2 \text{ m}$ . Calcular la aceleración lineal de  $m$ , la aceleración angular del cilindro  $M$ , y la tensión de la cuerda. Despreciar el efecto de la pequeña polea.

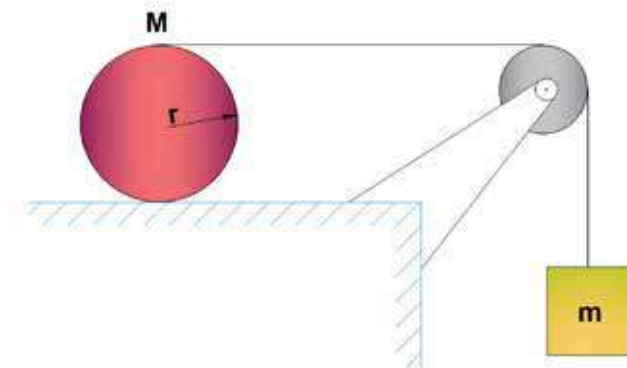


Figura 2.53. Movimiento de un sistema de una polea unida a dos masas, una de estas es circular.

**Respuestas:**  $\tau = 1,985 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  $\alpha = 1,985 \text{ rad/s}^2$ ;  $a = 0,377 \text{ m/s}^2$

**Ejercicio 2.2.54.** Determinar, para el sistema de la Fig. 2.54 la velocidad angular del disco y la velocidad lineal de  $m$  y  $m'$ . Calcular la tensión en cada cuerda. Suponer que  $m = 600 \text{ g}$ ,  $m' = 500 \text{ g}$ ,  $R = 8 \text{ cm}$  y  $r = 6 \text{ cm}$ .

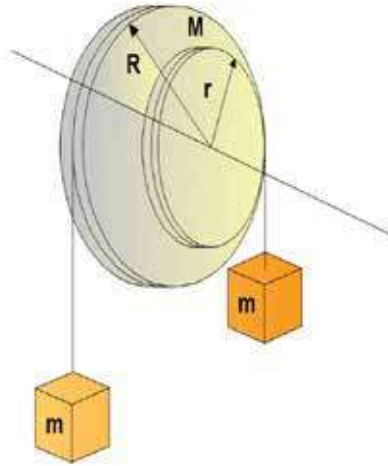


Figura 2.54. Movimiento de un disco polea unido a dos masas.

**Respuestas:**

- Aceleración lineal de  $m$ :  $1,33 \text{ m/s}^2$
- Velocidad angular del disco:  $16,6 \text{ t rad/s}$
- Velocidad lineal de  $m$ :  $1,33 \text{ t m/s}$
- Velocidad lineal de  $m'$ :  $1,00 \text{ t m/s}$
- Tensión en la cuerda que sostiene  $m$ :  $5,84 \text{ N}$
- Tensión en la cuerda que sostiene  $m'$ :  $5,40 \text{ N}$

**Ejercicio 2.2.55.** Para el sistema de la Fig. 2.55. Calcular la aceleración de  $m$  y la tensión en la cuerda, suponiendo que el momento de inercia del pequeño disco de radio  $r$  es despreciable. En este caso,  $r = 4 \text{ cm}$ ,  $R = 12 \text{ cm}$ ,  $M = 4 \text{ kg}$  y  $m = 2 \text{ kg}$ .

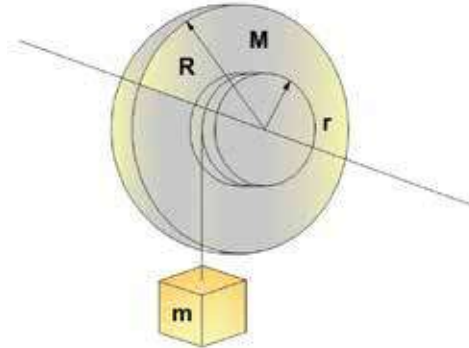


Figura 2.55. Movimiento de un disco polea unido a una masa.

**Respuestas:**  $0,981 \text{ m/s}^2$ ;  $17,66 \text{ N}$

**Ejercicio 2.2.56.** En la Fig. 2.56,  $M = 6 \text{ kg}$ ,  $m = 4 \text{ kg}$ ,  $m' = 3 \text{ kg}$  y  $R = 0,40 \text{ m}$ . Calcular:

- La energía cinética total ganada por el sistema después de  $5 \text{ s}$ .
- La tensión de la cuerda.

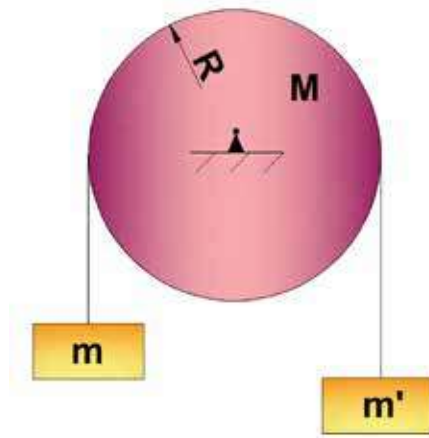


Figura 2.56. Movimiento de una polea circular unida a dos masas.

**Respuestas:** a)  $120,05 \text{ J}$       b)  $35,28 \text{ N}$



**Ejercicio 2.2.57.** Un anillo de 140 kg rueda a lo largo de un piso horizontal de modo que su centro de masa tiene una velocidad de 0,150 m/s. ¿Cuánto trabajo debe realizarse para detenerlo? (Fig. 2.57). [5], [6], [4]

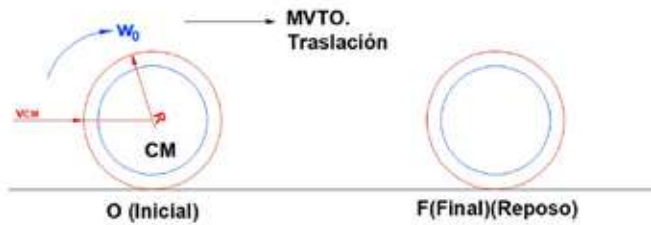


Figura 2.57. Movimiento de un anillo por un piso horizontal.

**Respuesta:** 3,15 J

## Capítulo III

# MOVIMIENTO OSCILATORIO

### 3.1. Generalidades

En el macrouniverso, este movimiento llamado también “Movimiento Periódico”, es el movimiento repetitivo de un objeto el mismo que luego regresa a una posición conocida después de un intervalo de tiempo fijo. El movimiento repetitivo de tal objeto se llama “oscilación”. Cuando se desprecia el rozamiento del objeto con el medio en el cual se mueve (por ejemplo, aire, para el caso de la Fig. 3.1) el movimiento periódico se llama movimiento armónico simple (M.A.S.).

En el microuniverso, las oscilaciones también están presentes, especialmente a nivel atómico y subatómico, donde son inducidas por fuerzas electromagnéticas. Sin embargo, el estudio de estos fenómenos requiere el marco teórico de la Física Cuántica, una ciencia que no se aborda en esta obra.

EL M.A.S también forma la base para comprender las ondas mecánicas, las ondas sonoras, las ondas sísmicas, las ondas sobre cuerdas estiradas, y las ondas en el agua que son producidas por alguna fuente de oscilación. A medida que una onda sonora viaja a través del aire, elementos del aire oscilan de atrás para adelante, conforme una onda en el aire viaja a través de un estanque, los elementos del agua oscilan arriba y abajo y en retroceso y hacia adelante. El movimiento de los elementos conduce a una marcada similitud con el movimiento periódico

de un péndulo oscilante o un objeto unido a un resorte laminar, como el de la figura 3.1. En un extremo del resorte esta amordazado y si de la pequeña esfera a partir de la posición de equilibrio “0” se le aplica una fuerza externa ( $F_{ext}$ ) hacia la izquierda, inmediatamente actuará la fuerza elástica recuperadora ( $F_K$ ) en sentido opuesto, si se suprime la  $F_{ext}$ ., en el extremo “b” el sistema masa (m) resorte realizará oscilaciones entre “b” y “a”.

## 3.2. Condiciones

### 3.2.1. Geometría

El desplazamiento es fijo, entre puntos equidistantes a la posición de equilibrio, manteniendo siempre la misma trayectoria.

### 3.2.2. Dinámica

La fuerza neta ( $F_K$ ) que actúa sobre la partícula es directamente proporcional al desplazamiento y está dirigida siempre hacia la posición de equilibrio.

$$F_K = -Kx \text{ (Ley de Hooke)}$$

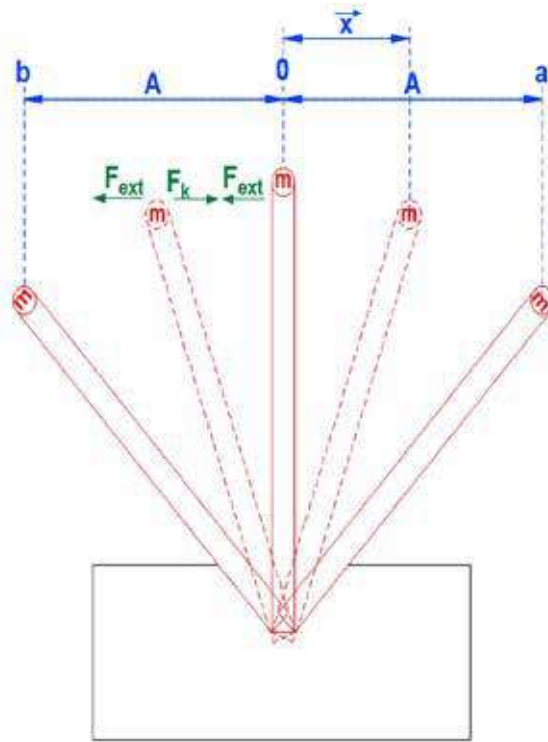


Figura 3.1. Definición de variables en el M.A.S.

### 3.3. Definiciones

#### 3.3.1. Posición de Equilibrio

Es la posición donde la fuerza neta que actúa sobre la partícula es nula. ( $F_K = 0$ ). Esta posición se caracteriza por encontrarse en el centro de la trayectoria (punto "0") Fig. 3.1 MVTO. Oscilatorio.

#### 3.3.2. Posición ( $x$ )

Es la ubicación (o posición) que tiene la partícula en un instante de tiempo ( $t$ ) cualesquiera, respecto a un sistema de referencia, cuyo origen debe coincidir con la posición de equilibrio

(0).

### 3.3.3. Amplitud (A)

Es la distancia máxima que existe entre la posición de equilibrio (punto 0) y la posición de la partícula en cualesquiera de los extremos (punto a o b). ( $A = X_{\text{máx}}$ ), en estas posiciones la fuerza neta ( $F_K$ ) que actúa sobre la partícula es también máxima y dirigida hacia el centro (punto 0) contraria al desplazamiento (posición  $x$ ).

### 3.3.4. Oscilación o ciclo

Es el camino que recorre la partícula hasta que el estado de MVTO., se repita exactamente en desplazamiento, velocidad y aceleración, geométricamente una oscilación puede ser la trayectoria de b-0-a-0-b (tomando como referencia el punto b); o también a-0-b-0-a (tomando como referencia el punto a); o también desde 0-a-0-b-0 (tomando como referencia la posición de equilibrio punto 0) en la Fig. 3.1.

### 3.3.5. Período (T')

Es el tiempo que utiliza la partícula en una oscilación completa o ciclo.

$$T' = \frac{\Delta t}{n} \quad (3.1)$$

En donde:

$n$  = número de oscilaciones

$\Delta t$  = Tiempo en  $n$  oscilaciones (s)

También se define el período (T') así:

$$T' = \frac{2\pi \text{rad}}{\omega} \quad (3.2)$$

En donde:  $\omega$  = Frecuencia angular del M.A.S

### 3.3.6. Frecuencia

Es el número de oscilaciones completas que realiza la partícula en la unidad de tiempo (1 segundo) así:

$$f = \frac{n}{\Delta t} \quad (3.3)$$

En donde:

$$f = \text{frecuencia } \frac{1}{s} = s^{-1} = \text{Hz}$$

Como la frecuencia es el inverso del período, según las ecuaciones (3.1) y (3.2) tenemos:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi \text{ rad}} \quad (3.4)$$

De donde:

$$\omega = 2\pi f \quad (3.4) \text{ a}$$

### 3.4. Descripción geométrica del M.A.S haciendo una analogía con el movimiento circular (M.C)

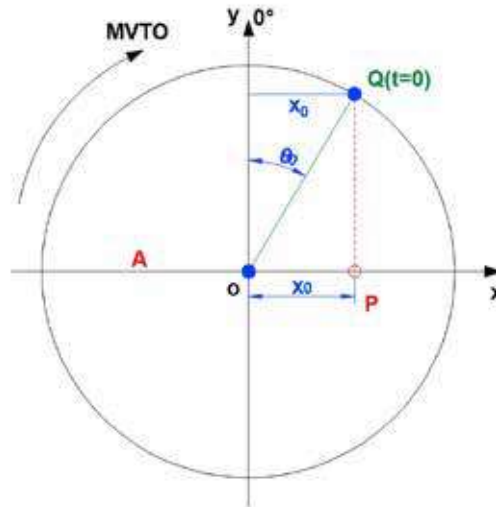


Figura 3.2. Analogía entre el M.A.S y el MVTO. circular.

Consideremos que una partícula que realiza un movimiento circular uniforme (M.C.U). En la trayectoria circular que se muestra en la Fig. 3.2 mientras la proyección del punto “Q” sobre el diámetro horizontal (Eje X) proyección “P” ejecuta un M.A.S. Las características cinemáticas del MVTO., de “Q” son análogas al MVTO., de la proyección P sobre el diámetro horizontal. Así por ejemplo el punto Q describe una trayectoria circular de radio “A”, para el movimiento oscilatorio de la proyección “P”, el radio corresponde a la amplitud “A”, el período T para el movimiento circular uniforme de Q es el mismo para “P” la frecuencia angular ( $\omega$ ) del M.A.S corresponde a la velocidad angular constante ( $\omega$ ) del M.C.U., y la frecuencia ( $f$ ) también son las mismas.

Tomando como referencia el eje y positivo, la posición inicial ( $x_0$ ) de P lo calculamos así:

$$\text{sen } \theta_0 = \frac{x_0}{A} \Rightarrow x_0 = \pm A \text{ sen } \theta_0 \quad (3.5)$$

$\theta_0$  Es el ángulo entre el radio OQ y el eje y (+) tomado como referencia, en el tiempo ( $t=0$ ) y se denomina “Fase Inicial del MVTO.”, es un ángulo ajustable que sirve para establecer la correspondencia inicial de  $x$  ( $x_0$ ) para  $t = t_0 = 0$ .

$x_0$ , es la desviación (Posición Inicial) del cuerpo respecto de su posición de equilibrio (Punto 0) para  $t = 0$ ,

Se confiere el signo (+) a  $x_0$ , cuando la partícula se encuentre a la derecha de la posición de equilibrio y el signo (-) cuando este a la izquierda.

Al ir girando la partícula de referencia Q, su proyección P tiene un movimiento de vaivén sobre el diámetro horizontal, alrededor del punto central “0”, el mismo que representa la posición de equilibrio.

### 3.4.1. Determinación de la posición o desplazamiento

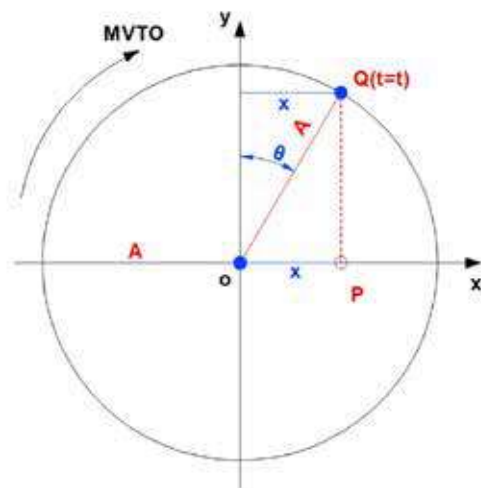


Figura 3.3. Definición de la posición (x) en función del tiempo (t).

Luego de un tiempo cualquiera  $t = t$ , el ángulo entre OQ y el eje y (de referencia) será:

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

Y se denomina ángulo de fase del movimiento, luego:

$$\text{sen} \theta = \frac{x}{A}$$

O también:

$$x = \pm A \text{ sen } (\omega t + \theta_0) \quad (3.6)$$

En donde:

$x$  = Posición o Desplazamiento (m)

$A$  = Amplitud (m)

$\omega$  = Frecuencia Angular (rad/s) del M.A.S que es igual a la velocidad angular constante del M.C.V de la partícula Q.

La componente del desplazamiento de Q sobre el eje X representa la posición de P. se confiere el signo (+) a la posición (x), cuando la partícula se encuentra a la derecha de la posición de



equilibrio y el signo (-) cuando está a la izquierda.

### 3.4.2. Determinación de la velocidad ( $v$ ) en función del tiempo ( $t$ )

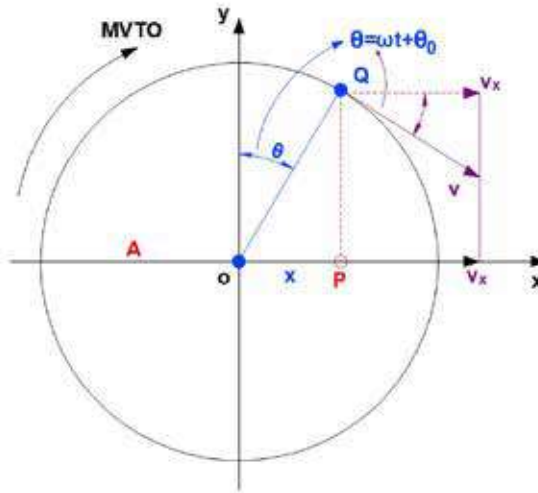


Figura 3.4. Definición de la velocidad ( $v$ ) en función del tiempo ( $t$ ).

La velocidad tangencial del punto de referencia Q, tiene con módulo  $\omega R = \omega A$ , por lo que la componente sobre el eje X, representa la velocidad de la proyección P. (Fig. 3.4). Tenemos:

$$\cos(\omega t + \theta_0) = \frac{v_x}{v}$$

$$v_x = \pm v \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$v_x = \pm \omega A \cos(\omega t + \theta_0) \quad (3.7)$$

El signo de la velocidad es (+) cuando la partícula se mueve hacia la derecha y (-) si lo hace a la izquierda.

### 3.4.3. Velocidad ( $v$ ) en función de la posición ( $x$ )

De la misma Fig. 3.4 tenemos:

$$\cos(\omega t + \theta_0) = \frac{\overline{QP}}{A}$$

$$A \cos(\omega t + \theta_0) = \overline{QP}(a)$$

Del triángulo rectángulo OPQ tenemos:  $\overline{QP} = \sqrt{A^2 - X^2}$  en (a)

$A \cos(\omega t + \theta_0) = \sqrt{A^2 - X^2}$  (b) según (3.7)  $A \cos(\omega t + \theta_0) = \frac{v_x}{\omega}$  (c)

$$(b) = (c) \Rightarrow \frac{v_x}{\omega} = \sqrt{A^2 - X^2} \Rightarrow v_x = \omega \sqrt{A^2 - X^2} \quad (3.8)$$

### 3.4.4. La aceleración (a) en función del tiempo (t)

En el M.C.U de la partícula Q, la aceleración es centrípeta, porque la tangencial es cero ( $a_t = R\alpha = 0$ ).

$a = a_R$  cuyo módulo es:  $a = \omega^2 R = \omega^2 A$ , la componente sobre el eje X de esta aceleración representa la aceleración de la proyección P. (Fig. 3.5).

Así tenemos:

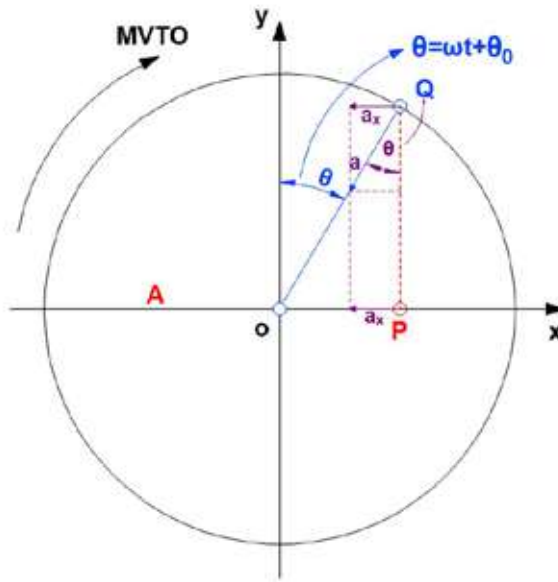


Figura 3.5. Definición de la aceleración en función del tiempo (t).

$$\sin(\omega t + \theta_0) = \frac{-a_x}{a}$$

$$a_x = -a \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$a_x = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta_0) \quad (3.9)$$

### 3.4.5. La aceleración (a) en función de la posición

Según la ecuación (3.6):  $x = A \sin(\omega t + \theta_0)$ , reemplazando este valor por “ $x$ ” en la ecuación (3.9) tenemos:

$$a_x = -\omega^2 x \quad (3.10)$$

En este caso se utiliza exclusivamente el signo (-) porque siempre la aceleración es de sentido contrario a la posición ( $x$ ) o también se opone siempre al movimiento de la proyección (P). De las relaciones establecidas para la posición ( $x$ ) ecuación (3.6), para la velocidad ( $v$ ), ecuaciones (3.7) y (3.8) y para la aceleración ( $a$ ), ecuaciones (3.9) y (3.10) se establece las siguientes conclusiones:

- Se obtiene la posición máxima, cuando la rapidez ( $v$ ) es cero, o sea cuando el ángulo  $\theta$  o  $(\omega t + \theta_0) = 90^\circ$ , en la ecuación (3.6)  $x = \pm A$ .  
En cambio, según (3.8)  $x = A \Rightarrow$  la velocidad  $v = 0$  o según la ecuación (3.7)  $\cos 90^\circ = 0$ , en este punto en cambio la aceleración será máxima de acuerdo a las ecuaciones (3.9) o (3.10):  $a_{\text{máx}} = -\omega^2 A$ .
- Se alcanza la posición de equilibrio ( $x = 0$ ) cuando la rapidez es máxima ( $\theta = \omega t + \theta_0 = 0^\circ$  o  $180^\circ$ ) y la aceleración es cero según las ecuaciones (3.9) o (3.10).
- La aceleración es siempre proporcional y opuesta a la posición.
- La posición inicial ( $x_0$ ) y la rapidez inicial ( $v_0$ ) son condiciones iniciales del MVTO., independiente de la frecuencia angular ( $\omega$ ) del MVTO.

### 3.4.6. Determinación del período (T') en el movimiento oscilatorio (M.A.S) - Péndulo de resorte helicoidal

Sabemos que el período (T') es:

Según la ecuación (3.2)

$$T' = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.2)$$

Por otro lado, de acuerdo a la segunda Ley de Newton:

$$F = m a$$

Y como en el M.A.S;  $a = -\omega^2 X$  (3.10) nos queda la fuerza (F)

$$F = -m \omega^2 X \quad (*)$$

Y de acuerdo a la Ley de Hooke:

$$F = -k X \quad (**)$$

En donde: k = Constante Elástica o Recuperadora (N/m)

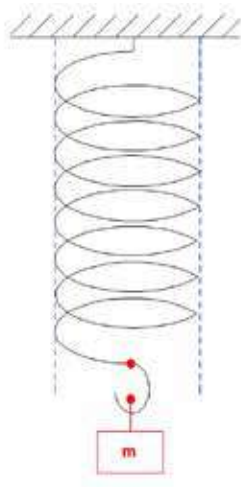


Figura 3.6. Péndulo de resorte

Igualando: (\*) = (\*\*) nos queda:

$-kX = -m \omega^2 X$ , de donde:

$$k = m \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.11)$$

Reemplazando (3.11) en (3.2) tenemos:

$$T' = \frac{2\omega}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.12)$$

Y la frecuencia (f) inversa del período (T') será:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.13)$$

### 3.4.7. Determinación de las leyes (ecuaciones) del M.A.S. utilizando cálculo diferencial

Como hemos visto, la fuerza ( $F$ ) la podemos expresar de acuerdo a la Ley de Hooke ( $-Kx$ ) o de acuerdo a la segunda Ley de Newton ( $m \cdot a$ ) en la cual la aceleración lineal ( $a$ ) es la segunda derivada de la posición ( $x$ ) respecto al tiempo.

$\frac{d^2x}{dt^2}$ , lo que significa que:  $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$ , igualando estas dos relaciones tenemos:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$  dividiendo para  $m$  tenemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (3.14)$$

Ahora las funciones, que derivando se obtienen funciones de la misma naturaleza, son las funciones seno o coseno, porque la condición es que la segunda derivada de  $x = f(t)$  sea una función de  $x$ , elegimos como:

$x = A \sin(\omega t + \theta_0)$ ; en donde  $\theta = \omega t + \theta_0$ ;  $A$  = Amplitud o  $X_{\max}$

Si derivamos una vez la función anterior tenemos:

$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \theta_0)$ ; y la segunda derivada:

$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0)$ ; pero como:  $x = A \sin(\omega t + \theta_0)$

Se cumple la condición de la ecuación (3.14), es decir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x; \text{ en donde } -\omega^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Entonces para que se cumpla la relación de la ecuación (3.14) la posición  $x$  es:

$$x = \pm A \sin(\omega t + \theta_0) \quad (3.6) \text{ la primera derivada significa } (v)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm A \omega \cos(\omega t + \theta_0) \quad (3.7) \text{ y la derivada de } v = f(t) \text{ es la aceleración } a$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) \quad (3.9).$$

Que son las relaciones que se demostraron por la analogía con el M.C.V y geoméricamente.

### 3.4.8. Energía en el movimiento oscilatorio (M.A.S.)

Como la única fuerza que actúa sobre la partícula que vibra con M.A.S es la fuerza elástica que depende de la posición ( $F = -k X$ ), esta es una fuerza conservativa por lo tanto debe mantenerse constante la energía mecánica total del sistema.

En cualquier posición debe cumplirse entonces la conservación de la energía mecánica (EM):

$$EM = EC + EP = \text{CONSTANTE} \quad (3.15)$$

En donde:

$EC$  = Energía Cinética Instantánea y será:

$$EC = \frac{1}{2}mv^2 \text{ donde:}$$

$$v = \pm \omega A \cos(\omega t + \theta_0) \text{ y } m = \frac{k}{\omega^2}$$

Remplazando tenemos:

$$EC = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{\omega^2} \right) \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \theta_0)$$

Ahora el coseno, es máximo, cuando  $\theta = \omega t + \theta_0 = 0^\circ$  y esto ocurre en la posición de equilibrio (punto 0):

$$\cos^2(\omega t + \theta_0)_{\text{maximo}} = 1$$

$$EC = \frac{1}{2} k A^2 \text{ en el centro.}$$

Durante el movimiento la Energía Cinética varía entre cero (en los extremos) y el valor indicado en el centro.

En cambio, la energía potencial (EP) en un instante cualquiera es:

$$EP = \frac{1}{2} k X^2 \text{ en donde:}$$

$X = \pm A \sin (\omega t + \theta_0)$  reemplazando tenemos:

$$EP = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 (\omega t + \theta_0) = \frac{1}{2} K A^2 \sin^2 (\omega t + \theta_0)$$

Como  $\sin^2 (\omega t + \theta_0)_{\text{máximo}} = 1$  en los extremos cuando  $\theta = \omega t + \theta_0 = 90^\circ$  o  $270^\circ$  tenemos:

$$EP_{\text{máx}} = \frac{1}{2} k A^2 \text{ en los extremos.}$$

Durante el movimiento, la energía potencial varía entre cero (en el centro punto 0) y el valor máximo indicado (en los extremos). En el transcurso de la oscilación hay un intercambio de energía potencial y cinética, pero en cualquier posición la energía mecánica es constante e igual a  $\frac{1}{2} K A^2$ , por ejemplo, en el centro:

$$EM_0 = EC_0 + \cancel{EP_0} = EC_{\text{máx}} = \frac{1}{2} k A^2$$

En los extremos:

$$EM_a = \cancel{EC_a} + EP_a = EP_{\text{máx}} = \frac{1}{2} k A^2$$

Cuando la partícula se aleja de la posición de equilibrio, la energía potencial intercambia su valor a expensas de una disminución de la Energía Cinética y viceversa:

La Energía Mecánica en cualquier instante será:

$$EM = EC + EP = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k A^2 \text{ o también:}$$

$$EM = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega^2} \omega^2 A^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \theta$$

$$EM = \frac{1}{2} k A^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

Como:  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , entonces.

$$EM = \frac{1}{2} k A^2 = \text{Constante} \quad (3.16)$$

Podemos representar la energía mecánica total en un gráfico como el siguiente: Fig. (3.7).

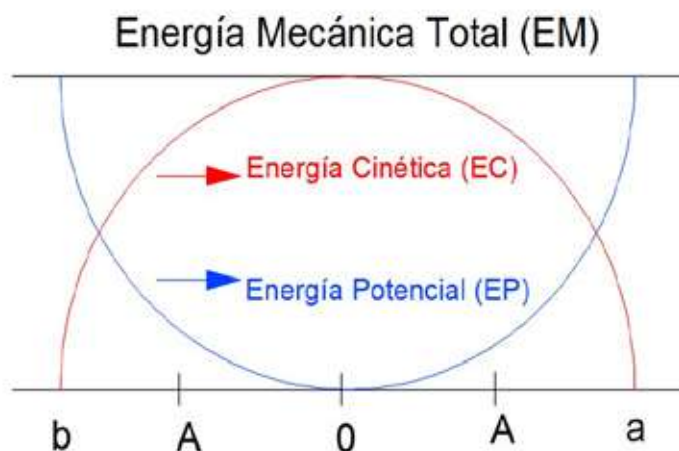


Figura 3.7. La energía mecánica en el MVTO oscilatorio (M.A.S).

### 3.4.9. Osciladores prácticos del (M.A.S)

El análisis de los principios del M.A.S es aplicable en la realidad a todos los sistemas vibrantes de corta amplitud. Estos sistemas no pueden ser únicamente mecánicos, sino que también son aplicables para osciladores afines como ondas de radio, microondas, entre otros.

#### El péndulo matemático o péndulo simple

Es un sistema mecánico que consta exactamente de una pequeña masa, que puede considerarse como una masa puntual ( $m$ ) suspendida de una cuerda de masa despreciable e inextensible. Cuando el sistema se separa de la posición de equilibrio y se suelta, el péndulo oscila en un plano vertical por acción de la gravedad, Fig. 3.8a.

Consideremos un péndulo de longitud  $L$  y una partícula de masa ( $m$ ) oscilando:

Refiriéndonos al diagrama del cuerpo libre (d.c.l) de la Fig. 3.9(b), en cualquier posición, las fuerzas que actúan sobre la partícula son: su peso ( $mg$ ) y la tensión de la cuerda ( $T$ ).

La resultante de las fuerzas en dirección radial (o central) eje  $Y$  ( $T - mg \cos \theta$ ) proporciona la aceleración centrípeta (o radial), que permite a la partícula moverse en el arco de circunferencia.



En cambio, la componente del peso en la dirección tangencial ( $mg \sin \theta$ ) es la fuerza restauradora ( $F_r$ ) que trata de volver a la partícula a la posición de equilibrio. (Eje X) así tenemos:

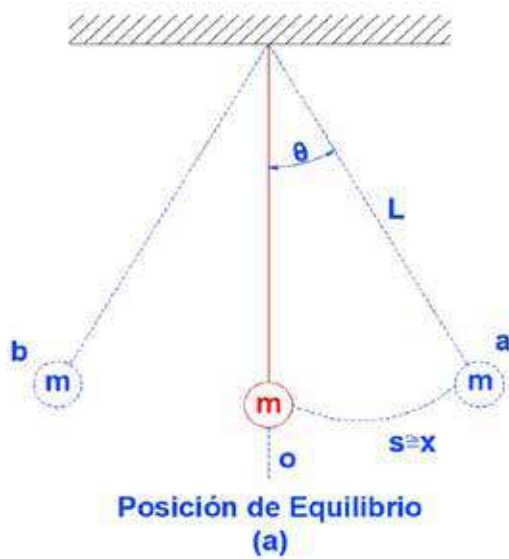


Figura 3.8. Péndulo matemático.

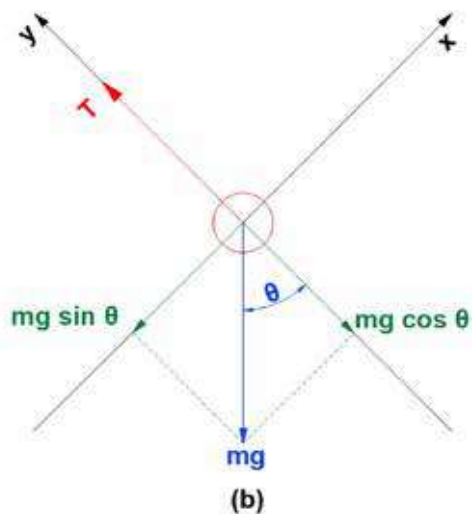


Figura 3.9. Diagrama del cuerpo libre (d.c.l.).

$$F_r = -mg \sin \theta$$

Para ángulos pequeños, de hasta aproximadamente  $10^\circ$  (grados) se tiene que:

$\sin \theta \cong \theta$  (en radianes)

Por lo tanto:  $F_r = -mg \theta$

Por otro lado, sabemos que de la relación entre desplazamientos lineal ( $\Delta r \cong \Delta S = S \cong X$ ) y el angular ( $\Delta \theta = \theta$ ), se tiene que:

$\theta = \frac{S}{R} \cong \frac{X}{L}$ , luego nos queda:

$$F_r = -mg \frac{X}{L}$$

Ahora, de acuerdo a Hooke, la fuerza recuperadora:  $= F_r = -k X$

Igualando estas últimas relaciones tenemos:

$$-k X = -mg \frac{X}{L} \Rightarrow k = \frac{mg}{L}$$

Reemplazando esta constante recuperadora en la fórmula correspondiente al período para un oscilador: ecuación (3.12)

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{L}}}$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.17)$$

Analizando este último resultado concluimos:

- a. El período del péndulo simple depende de la longitud (L) y es proporcional a la misma.
- b. El período también depende de la aceleración del campo gravitacional (g) y con ella es inversamente proporcional, aumentando el período, cuando la aceleración disminuya, por ejemplo, en diferentes puntos en la tierra, o en la luna.
- c. El período (T') es independiente de la masa puntual (m), o sea se obtendrá valores aproximados para una esferita de corcho o de madera que para una de acero.
- d. El período (T') también es independiente de la amplitud, para ángulos pequeños, de hasta aproximadamente (10 a 15 grados).

### El péndulo físico

Mientras el péndulo simple se trata de una masa puntual, oscilando alrededor de un eje alejado de la masa puntual, ahora trataremos a un cuerpo rígido, es decir cualquier cuerpo de cualquier forma, que pueda oscilar alrededor de un eje perpendicular al cuerpo que atraviese al mismo por un punto de suspensión (O) que no coincida con su centro de masa, a este oscilador se llama “péndulo físico”, Fig. 3.10.

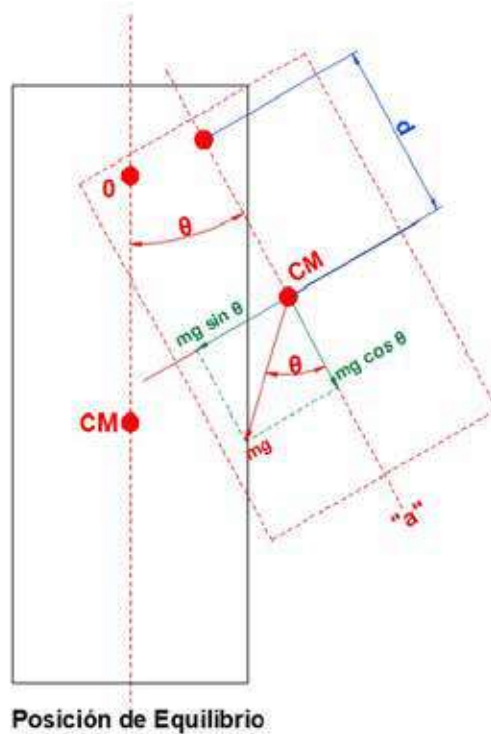


Figura 3.10. Péndulo físico (Posición de equilibrio).

Si la lámina rectangular que se muestra en la Fig. 3.10 se encuentra suspendida por un eje perpendicular que pasa por “O” si en la posición vertical, la lámina se encuentra en equilibrio estático, si a partir de esta posición le aplicamos un torque externo contrario a las manecillas del reloj hasta colocarlo en la posición “a” y si en estas condiciones lo soltamos (suspendemos el torque externo), el torque recuperador permite que la lámina regrese a su posición de equilibrio, pero no se detiene, sino que gira hasta una posición similar en el otro lado, y así realiza un movimiento oscilatorio, a este oscilador lo llamamos “Péndulo Físico”.

Llamando:

$m$  = Masa del cuerpo

$I$  = Momento de inercia con respecto a “O”

$$\tau' = \text{Toque recuperador} = K' \theta$$

Ahora el torque que actúa sobre el péndulo en la posición “a” que permite que regrese a la posición de equilibrio es:

$$\tau = -mg \sin \theta d; \text{ para ángulos pequeños: } \sin \theta \cong \theta \text{ (en rad)}$$

$$\tau = -mg \theta d; \text{ igualando con el torque recuperador:}$$

$$-K' \theta = -mg \theta d \Rightarrow K' = mg d \text{ (constante recuperadora para un péndulo físico)}$$

Por otro lado, sabemos que la segunda Ley de Newton, para la rotación es:

$$\tau = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Igualando con el torque recuperador:  $\tau' = -K' \theta$  tenemos:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -K' \theta; \text{ dividiendo para I tenemos:}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{K'}{I} \theta \text{ (a)}$$

Para que la relación anterior (a) se cumpla, la función , sería, por ejemplo:

$$\theta = \theta_m \sin (\omega t + \theta_0)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \theta_m \cos (\omega t + \theta_0)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta_m - \sin (\omega t + \theta_0) = -\omega^2 \theta$$

Por lo tanto:

$$-\omega^2 \theta = -\frac{K'}{I} \theta \Rightarrow \sqrt{\frac{K'}{I}}$$

Como el período (T') es:  $T' = \frac{2\pi}{\omega}$ ; tenemos:

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K'}{I}}} \Rightarrow T' = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K'}}$$

Reemplazando el valor obtenido para la constante recuperadora para este caso tenemos:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg d}} \quad (3.18)$$

En donde d es la distancia entre el centro de gravedad y el punto de suspensión.

## El péndulo de torsión

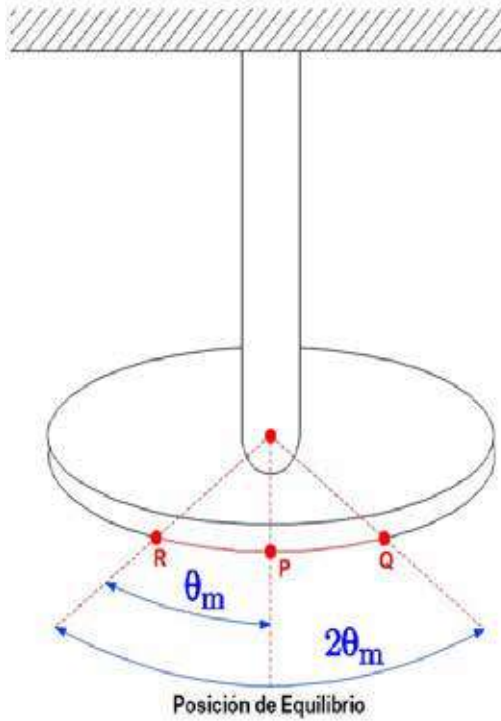


Figura 3.11. Péndulo de torsión.

Un cuerpo rígido que puede girar alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro de masa, como el de la Fig. 3.11 se llama "Péndulo de Torsión".

El torque recuperador será:  $\tau = -K' \theta$ , en donde:

$K'$  = Constante de torsión recuperadora

$\tau$  = Torque recuperador (negativo -) es opuesto al desplazamiento angular ( $\theta$ ).

Por otro lado, sabemos que:  $\tau = I \alpha = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$

Igualando con el torque anterior tenemos:

$$I - \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{K'}{I} \theta \quad (A)$$

Para que se cumpla la ecuación (A); si:  $\theta = \theta_m \sin (\omega t + \theta_0)$

Entonces:  $\frac{d\theta}{dt} = \omega \theta_m \cos (\omega t + \theta_0)$ , y la segunda derivada será:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta_m \sin (\omega t + \theta_0)$$

Como:  $\theta = \theta_m \sin (\omega t + \theta_0)$  tenemos que:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta \quad (B)$$

Igualando (A)=(B)

$$-\frac{K'}{I}\theta = -\omega^2 \theta \Rightarrow -\omega^2 = -\frac{K'}{I} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K'}{I}} \text{ reemplazando en la fórmula del período (T)}$$

tenemos:

$$T' = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K'}} \quad (3.19)$$

En donde:

I= Momento de inercia con respecto a un eje que pasa perpendicular al cuerpo con el centro de masa.

$K' = \frac{\tau'}{\theta}$  constante recuperadora de torsión  $\left[\frac{Nm}{rad}\right]$ . [5], [7], [6]

## Capítulo IV

# EJERCICIOS PROPUESTOS Y RESUELTOS DE MOVIMIENTO OSCILATORIO

Similar al capítulo II, intentamos facilitar la comprensión del lector enumerando las ecuaciones internamente en cada ejercicio resuelto. Además se presentan los datos de los ejercicios y se incluyen paulatinamente las variables y magnitudes a determinar según el enunciado del ejercicio.

### 4.1. Ejercicios resueltos

**Ejercicio 4.1.1.** *Un oscilador está formado por un bloque de 0,500 kg de masa conectado a un resorte. Cuando se hace oscilar con una amplitud de 35 cm, el oscilar repite su movimiento cada 0,500 s. Encuentre:*

- a. El período.*
- b. La frecuencia.*
- c. La frecuencia angular.*
- d. La constante del resorte.*
- e. La máxima velocidad.*
- f. La magnitud de la máxima fuerza sobre el bloque desde el resorte.*



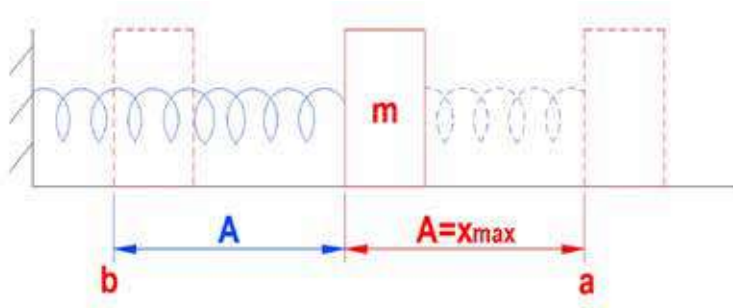


Figura 4.1. Oscilación de un bloque de masa  $m$  conectado a un resorte.

Datos:

$$m = 0,5 \text{ kg}$$

$$A = 35 \text{ cm} = 0,35 \text{ m}$$

$$T = 0,5 \text{ s}$$

**Resolución (a):** El período ( $T$ ), es el tiempo que tarda en realizar una oscilación de “a” hacia “b” y “b” hacia “a”, está dado por  $T = 0,5 \text{ s}$

**Resolución (b):** La frecuencia es en inverso del período, por lo que:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{T} \\ &= \frac{1}{0,5 \text{ s}} \\ &= 2 \text{ Hz} \end{aligned}$$

**Resolución (c):** La frecuencia angular estará dada por:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ &= 2\pi f \\ &= \frac{2\pi \text{ rad}}{0,5 \text{ s}} \\ &= 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ &= 12,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

**Resolución (d):** De la igualdad  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  tenemos que:

$$\begin{aligned} k &= m \omega^2 \\ &= 0,5 \text{ kg} \left( 12,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \\ &= 79 \text{ N/m} \end{aligned}$$

**Resolución (e):** La velocidad máxima estará dada por:

$$\begin{aligned} v_{\text{máx}} &= \omega A \\ &= 12,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} (0,35 \text{ m}) \\ &= 4,4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Resolución (f):** La magnitud de la fuerza máxima estará dada por:

$$\begin{aligned} F_{\text{máx}} &= m a_{\text{máx}} \\ &= m \omega^2 A \\ &= 0,5 \text{ kg} \left( 12,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 (0,35 \text{ m}) \\ &= 27,6 \text{ N} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.2.** Una partícula de masa igual a  $1 \times 10^{-20} \text{ kg}$  oscila con movimiento armónico simple a un período de  $1 \times 10^{-5} \text{ s}$  y a una velocidad máxima de  $1 \times 10^3 \text{ m/s}$ . Calcule:

a. La frecuencia angular.

b. El desplazamiento máximo de la partícula.

Datos:

$$m = 1 \times 10^{-20} \text{ kg}$$

M.A.S

$$T = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$$

$$v_{\text{máx}} = 1 \times 10^3 \text{ m/s}$$

**Resolución (a):**

$$\begin{aligned} w &= \frac{2\pi \text{ rad}}{T} \\ &= \frac{2\pi \text{ rad}}{10^{-5} \text{ s}} \\ &= 6,28 \times 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

**Resolución (b):**

$$\begin{aligned} A &= \frac{10^3 \text{ m/s}}{6,28 \times 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \\ &= 159 \times 10^{-3} \text{ m} \\ &= 1,59 \times 10^{-3} \text{ m} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} \\ &= 1,59 \text{ mm} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.3.** En una maquinilla eléctrica para afeitar, las navajas se mueven hacia adelante y hacia atrás a una distancia de 2 mm en movimiento armónico simple (M.A.S), con una frecuencia de 120 Hz. Encuentre:

a. La amplitud.

b. La máxima velocidad de las navajas.

c. La magnitud de la máxima aceleración de las navajas.

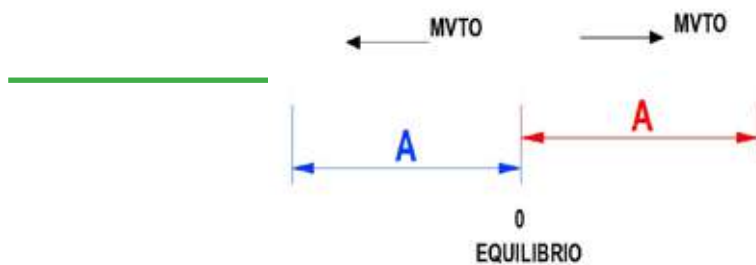


Figura 4.2. Movimiento de las navajas para afeitarse.

Datos:

$$2A = 2 \text{ mm}$$

$$A = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$$

*M.A.S*

$$f = 120 \text{ Hz}$$

**Resolución (a):** De la ecuación  $2A = 2 \text{ mm}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{2} \text{ mm} \\ &= 1 \text{ mm} \\ &= 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

**Resolución (b):**

$$\begin{aligned} v_{\text{máx}} &= Aw [1] \\ &= A 2\pi f \\ &= 10^{-3} \text{ m} (2\pi) \left( \frac{120}{\text{s}} \right) \\ &= 0,75 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Resolución (c):**

$$\begin{aligned}a_{\text{máx}} &= Aw^2 \\&= 10^{-3}\text{m} \left( \frac{2\pi \times 120}{\text{s}} \right)^2 \\&= 568,5 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.4.** *Se puede considerar que un automóvil está montado sobre cuatro resortes idénticos por lo que respecta a oscilaciones verticales. Los resortes de cierto auto están ajustados de modo que las oscilaciones tienen una frecuencia de 3 Hz.*

- ¿Cuál es la constante de resorte de cada resorte si la masa del auto es de 1 450 kg y está uniformemente distribuida sobre los resortes?*
- ¿Cuál será la frecuencia de oscilación si cinco pasajeros, que en promedio pesan 73 kg cada uno, viajan en el auto? (De nuevo, considere una distribución de masa homogénea).*

Datos:

$$2A = 2 \text{ mm}$$

$$A = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$$

$$f = 3 \text{ Hz}$$

$$N^{\circ}\text{resortes} = 4$$

$$m_{\text{auto}} = 1\,450 \text{ kg}$$

**Resolución (a):** De acuerdo con la ecuación  $k = mw^2$  y  $w = 2\pi f$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}k &= m_{\text{pasajeros}} \left[ \frac{2\pi (3)}{\text{s}} \right]^2 \\&= 365 \text{ kg} \frac{(6\pi)^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{m}}{\text{m}} \\&= 1,29 \times 10^5 \text{ N/m}\end{aligned}$$

**Resolución (b):** Se tiene que:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{\frac{k}{m_1}} \\ &= \sqrt{\frac{1,29 \times 10^5}{453,75}} \\ &= 16,86 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

de dónde,

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{w_1}{2\pi} \\ &= \frac{16,86 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\pi \text{ rad}} \\ &= 2,68 \text{ Hz} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.5.** *El pistón de la cabeza del cilindro de una locomotora tiene una carrera de 0,76 m (doble de la amplitud). Si el pistón se mueve con M.A.S y una frecuencia de 180 rev/min. ¿Cuál es la máxima rapidez?*

Datos:

$$2A = 0,76 \text{ m}$$

$$A = \frac{0,76}{2} \text{ m} = 0,38 \text{ m}$$

M.A.S

**Resolución:** Se tiene que:

$$w = 180 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \Rightarrow w = 6\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 18,85 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

de dónde,

$$\begin{aligned} v_{\text{máx}} &= Aw \\ &= 0,38 \text{ m} \left( 18,85 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \\ &= 7,2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.6.** *En cierto puerto, las mareas ocasionan que la superficie del océano suba y baje una distancia  $d$  (desde el nivel más alto al más bajo) en movimiento armónico simple, con*

un período de 12,5 h. ¿Cuánto tarda el agua en bajar una distancia  $d/4$  desde el nivel más alto?

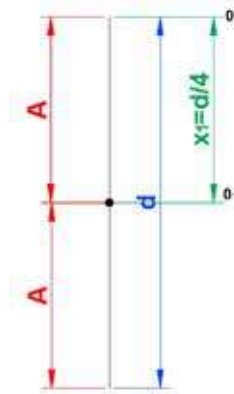


Figura 4.3. Movimiento de la superficie del océano.

Datos:

$$A = \frac{d}{2}$$

$$T = 12,5 \text{ h}$$

$$x_1 = \frac{d}{4} \theta_0 = \text{Fase Inicial} = 0$$

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12,5 \text{ h}}$$

**Resolución:**

$$x = A \cos (wt + \theta_0)$$

$$x_1 = A \cos (w t_1)$$

$$\frac{d}{4} = \frac{d}{2} \cos \left( \frac{2\pi}{12,5 \text{ h}} t_1 \right)$$

$$\frac{2}{4} = \cos \left( \frac{2\pi}{12,5 \text{ h}} t_1 \right)$$

$$\cos^{-1} (0,5) = \frac{2\pi}{12,5 \text{ h}} t_1$$

$$t_1 = \frac{60^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} (12,5 \text{ h})}{2\pi}$$

$$t_1 = 2,08 \text{ h}$$

**Ejercicio 4.1.7.** Un oscilador consta de un bloque unido a un resorte ( $k = 400 \text{ N/m}$ ). En algún tiempo  $t$ , la posición (medida desde el lugar de equilibrio del sistema). La velocidad y la aceleración del bloque son,  $x = 0,100 \text{ m}$ ,  $v = 13,6 \text{ m/s}$  y  $a = -123 \text{ m/s}^2$ . Calcular:

a. La frecuencia de oscilación.

b. La masa del bloque.

c. La amplitud del movimiento.

Datos:

$$k = 400 \text{ N/m}$$

$$t = t_1$$

$$x_1 = 0,100 \text{ m}$$

$$v = -13,6 \text{ m/s}$$

$$a = -123 \text{ m/s}^2$$

**Resolución a:** Aplicamos las ecuaciones del M.A.S, obteniendo que  $x_1 = A \cos w t_1$ , de dónde:

$$\cos w t_1 = \frac{0,1}{A}$$

por otro lado, de la igualdad  $a_1 = -Aw^2 \cos w t_1$ , se tiene que

$$\cos w t_1 = \frac{123}{Aw^2}$$

igualando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{0,1}{A} &= \frac{123}{Aw^2} \\ \sqrt{w^2} &= \sqrt{\frac{123}{0,1}} \\ w &= 35 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} f &= \frac{w}{2\pi} \\ &= \frac{35}{2\pi} \\ &= 5,58 \text{ Hz} \end{aligned}$$



**Resolución b:**

$$\begin{aligned}m &= \frac{k}{\omega^2} \\&= \frac{400}{(35)^2} \\&= 0,325 \text{ kg}\end{aligned}$$

**Resolución c:**

$$\begin{aligned}v_1 &= \omega \sqrt{A^2 - x_1^2} \\(-13,6)^2 &= \left(35 \sqrt{A^2 - (0,1)^2}\right)^2 \\A^2 - (0,1)^2 &= \frac{(13,6)^2}{(35)^2} \\A^2 &= \frac{(-13,6)^2}{(35)^2} + (0,1)^2 \\\sqrt{A^2} &= \sqrt{0,161} \\A &= 0,400 \text{ m}\end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.8.** Encuentre la energía mecánica de un sistema formado por un bloque y un resorte cuya constante de resorte es de 1,3 N/m y cuya amplitud de oscilación es de 2,4 cm.

Datos:

$$k = 1,3 \text{ N/m}$$

$$A = 2,4 \text{ cm} \times \frac{\text{m}}{100 \text{ cm}}$$

$$A = 0,024 \text{ m}$$

**Resolución:** De acuerdo con la ecuación 7.15 la energía mecánica (E) es la suma de la energía potencia elástica (U) y entre la energía cinética K y es una constante.

$$\begin{aligned}
 EM &= U + K = \frac{1}{2} k x_m^2 \\
 &= \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (1,3 \text{ N/m}) (0,024 \text{ m})^2 \\
 &= 3,7 \times 10^{-4} \text{ J} \\
 &= 3,7 \times 10^{-4} \text{ J} \times \frac{10^3 \text{ mJ}}{\text{J}} \\
 &= 0,37 \text{ mJ}
 \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.9.** Un resorte vertical se estira 9,6 cm cuando de su extremo se cuelga un bloque de 1,3 kg. Calcule:

- La constante de resorte, este bloque se desplaza luego de otros 5 cm hacia abajo y se suelta desde el reposo.
- El período.
- La frecuencia.
- La amplitud.
- La velocidad máxima del M.A.S resultante.

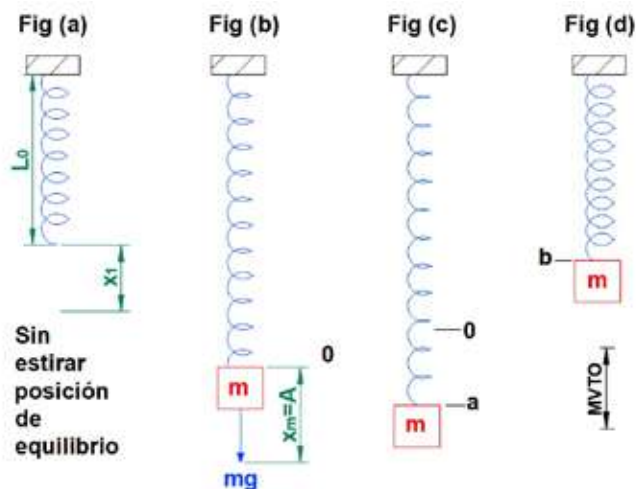


Figura 4.4. Movimiento de un resorte con distintas masas.

Datos:

$$x_1 = 9,6 \text{ cm} = 0,096 \text{ m}$$

$$m = 1,3 \text{ kg}$$

$$x_m = A = 5 \text{ cm}$$

$$A = 0,05 \text{ m}$$

**Resolución (a):** En la Figura (b) se tiene que  $w = kx_1$ , de dónde:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1,3 \text{ kg } (9,8 \text{ m/s}^2)}{0,096 \text{ m}} \\ &= 132,7 \text{ N/m} \end{aligned}$$

**Resolución (b):** Se tiene que:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{132,7}{1,3}} \Rightarrow \\ &= 10,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{w} \\ &= \frac{2\pi}{10,1} \\ &= 0,62 \text{ s} \end{aligned}$$

**Resolución (c):** De la ecuación  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,62}$ , se tiene que  $f = 1,6 \text{ Hz}$

**Resolución (d):**  $A = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$

**Resolución (e):**

$$\begin{aligned} v_{\text{máx}} &= Aw = 0,05 (10,1) \\ &= 0,51 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.10.** ¿Cuál es la longitud de un péndulo simple que marca 2 segundos al terminar una oscilación completa de izquierda a derecha?

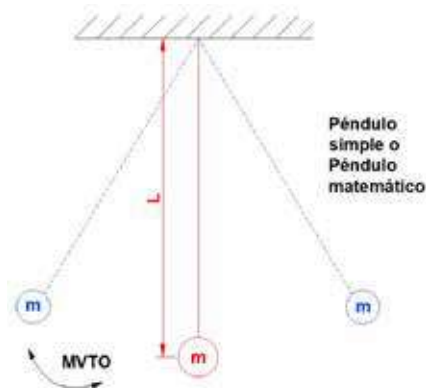


Figura 4.5. Movimiento de una barra unida a un eje de giro.

Datos:

$$T = 2 \text{ s}$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

**Resolución:** La fórmula para calcular el período (T) de un péndulo simple es:

$$(T)^2 = \left( 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \right)^2$$

$$4\pi^2 \frac{L}{g} = T^2$$

de donde:

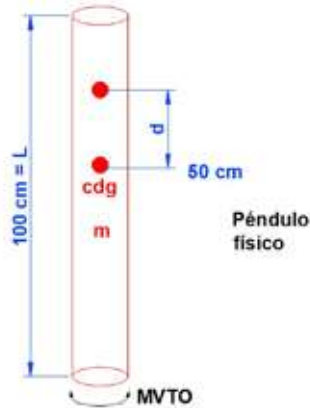
$$L = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2}$$

$$= \frac{(2 \text{ s})^2 (9,8 \text{ m/s}^2)}{4\pi^2}$$

$$= 0,99 \text{ m}$$

$$= 99 \text{ cm}$$

**Ejercicio 4.1.11.** Un péndulo físico consta de una barra graduada unida a un eje de giro en un pequeño agujero perforado en la barra a una distancia  $d$  desde la marca de 50 cm. El período de oscilación es de 2,5 s, encuentre  $d$ .



Datos:

$$L_{\text{barra}} = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$$

$$T = 2,5 \text{ s}$$

$$I = \frac{1}{12} m L^2$$

**Resolución:** Aplicando la fórmula  $T$  (período para un péndulo físico)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g d}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12} m L^2}{m g d}}$$

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{L^2}{12 g d}}\right)^2$$

despejando la distancia:

$$\begin{aligned} d &= \frac{L^2}{12g \left( \frac{T^2}{4\pi^2} \right)} \\ &= \frac{4\pi^2 (1 \text{ m})^2}{12 (9,8) (2,5)^2} \\ &= 0,054 \text{ m} \\ &= 5,4 \text{ cm} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.12.** Un pequeño cuerpo de masa 0,25 kg está ejecutando un M.A.S de amplitud 0,50 m y el período de 0,75 s. Determinar:

- El valor máximo de la fuerza recuperadora que obra sobre el cuerpo.
- Si las oscilaciones son producidas por un péndulo simple formado con este cuerpo, ¿cuál es la longitud el mismo?

Datos:

$$m = 0,25 \text{ kg}$$

$$A = x_{\text{máx}} = 0,5 \text{ m}$$

$$T = 0,75 \text{ s}$$

**Resolución (a):** Se tiene que  $F_{\text{máx}} = k \cdot x_{\text{máx}}$ , despejando  $k$  de la ecuación  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

$$\begin{aligned} k &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{T^2} \\ &= \frac{4 \cdot \pi^2 (0,25)}{(0,75)^2} \\ &= 17,5 \text{ N/m} \end{aligned}$$

por último:

$$\begin{aligned} F_{\text{máx}} &= (17,5) (0,5) \\ &= 8,77 \text{ N} \end{aligned}$$

**Resolución (b):** Despejando  $L$ , de la ecuación  $T^2 = \left(2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}\right)$  se tiene que:

$$\begin{aligned} L &= \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot 2\pi^2} \\ &= \frac{(0,75)^2 (9,8)}{4 \cdot 2\pi^2} \\ &= 0,14 \text{ m} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.13.**

Una partícula ejecuta un M.A.S lineal con respecto al punto  $x = 0$ , cuando se inicia la descripción del MVTO en  $t = 0$ ,  $x_0 = 0,50 \text{ cm}$ , y cuando la velocidad es cero,  $x = 1 \text{ cm}$  y la frecuencia es de  $0,25 \text{ Hz}$  (exprese la posición  $x$  con la función seno). Determinar:

- El período.
- La frecuencia angular (-)
- La amplitud
- El ángulo de fase inicial (-)
- La elongación ( $x$ ) en función del tiempo ( $t$ )
- La velocidad máxima (-)
- La aceleración máxima (-)
- La elongación para  $t = 3 \text{ s}$
- La velocidad para  $t = 3 \text{ s}$

Datos:

$$m = 0,25 \text{ kg}$$

$$A = x_{\text{máx}} = 0,5 \text{ m}$$

$$T = 0,75 \text{ s}$$

$$t = 0 \rightarrow x_0 = 0,50 \text{ cm}$$

$$v = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ cm} = A$$

$$f = 0,25 \text{ Hz}$$

**Resolución (a):**

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{f} \\ &= \frac{1}{0,25} \\ &= 4 \text{ s} \end{aligned}$$

**Resolución (b):**

$$\begin{aligned} w &= \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{2\pi}{4} \\ &= 1,57 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

**Resolución (c):**

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_0) &= \frac{x_0}{x_{\text{máx}}} \\ &= \frac{0,50}{1} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 30^\circ \\ &= \frac{\pi}{6} \text{ rad} \end{aligned}$$

**Resolución (d):**

$$\begin{aligned} x &= \pm A \text{sen} (wt + \theta_0) \\ &= \pm 1 \text{sen} \left( 1,57 t + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

**Resolución (e):**

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ &= \pm 1,57 \cos \left( 1,57 t + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$



**Resolución (f):**

$$\begin{aligned}v_{max} &= \omega A \\&= 1,57 (1) \\&= 1,57 \text{ cm/s}\end{aligned}$$

**Resolución (g):**

$$\begin{aligned}a_{\text{máx}} &= -\omega^2 A \\&= -(1,57)^2 (1) \\&= -2,465 \text{ cm/s}^2\end{aligned}$$

**Resolución (h):**

$$\begin{aligned}x &= 1 \left[ \text{sen} \left( 1,57 (3) + \frac{\pi}{6} \right) \right] \\&= \text{sen} \left( 5,23 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right) \\&= -0,87 \text{ cm}\end{aligned}$$

**Resolución (i):**

$$\begin{aligned}v &= 1,57 \cos \left[ 1,57 (3) + \frac{\pi}{6} \right] \\&= 1,57 \cos \left[ 5,23 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right] \\&= 0,78 \text{ cm/s}\end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.14.** Un aro circular de radio 60 cm y masa 4 kg oscila alrededor de un eje horizontal (I-I). Determinar:

- La frecuencia (f) de oscilación para movimientos de pequeñas amplitudes.
- La longitud del período simple equivalente

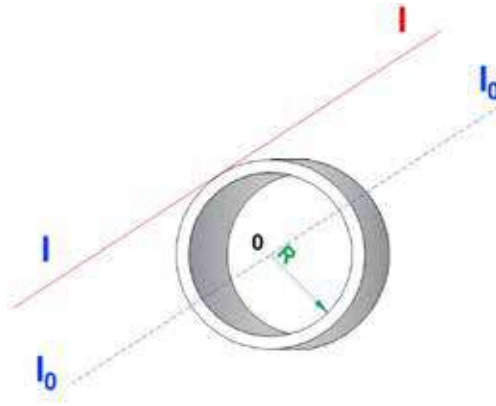


Figura 4.6. Movimiento de un aro circular en un eje horizontal.

Datos:

$$R = 0,60 \text{ m}$$

$$M = 4 \text{ kg}$$

**Resolución (a):** Aplicamos la ecuación del péndulo físico:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$ , donde  $d$  = distancia entre el centro de gravedad y el punto de suspensión. En este caso:  $d = R$ . Con el teorema de Steiner:

$$\begin{aligned} I &= I_0 + MR^2 = MR^2 + MR^2 \\ &= 2MR^2 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{2(0,60)}{9,8}} \\ &= 2,2 \text{ s} \end{aligned}$$

la frecuencia estará dada por

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{T} \\ &= \frac{1}{2,2} \\ &= 0,45 \text{ Hz} \end{aligned}$$

**Resolución (b):** Despejando  $L$  de la ecuación  $(T)^2 = \left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^2$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} L &= \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot g \\ &= \frac{(2,2)^2}{4\pi^2} \cdot (9,8) \\ &= 1,2 \text{ m} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.15.** El movimiento del pistón de un automóvil es aproximadamente armónico simple, si la carrera de un motor (dos veces la amplitud) es de 20 cm y la velocidad angular ( $\omega$ ) es de 3 600 rpm. Determinar:

- La aceleración del pistón en el extremo de su carrera.
- Si el pistón tiene una masa de 500 gramos. ¿Qué fuerza resultante se ejerce sobre el pistón en este punto? (En el extremo).
- La velocidad del pistón en km/h, en el punto medio de su carrera.

Datos:

$$2A = 20 \text{ cm}$$

$$A = 10 \text{ cm}$$

$$w = 3\,600 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} = 377 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

**Resolución (a):**

$$\begin{aligned} a_{\text{máx}} &= -w^2 A \\ &= (377)^2 (0,10) \\ &= 14\,212,9 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

**Resolución (b):**

$$\begin{aligned} F_{\text{máx}} &= m a_{\text{máx}} \\ &= 0,5 (14\,212,9) \\ &= 7\,106,5 \text{ N} \end{aligned}$$

**Resolución (c):**

$$\begin{aligned} v_{\text{máx}} &= w A \\ &= 377 (0,1) \\ &= 37,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\text{km}}{1000 \text{ m}} \times \frac{3600 \text{ s}}{\text{h}} \\ &= 135,7 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.16.** *Un cuerpo con una masa de 100 gramos pende de un largo resorte en hélice, cuando se estira 10 cm por debajo de su posición de equilibrio y se abandona a sí mismo, oscila con un período de 2 s. Determinar:*

- Su velocidad al pasar por su posición de equilibrio.*
- La aceleración cuando se encuentra 5 cm por encima de su posición de equilibrio.*
- El tiempo que tarda desde la posición de equilibrio hasta la elongación de 5 cm. (Considerar en la función elongación el seno).*

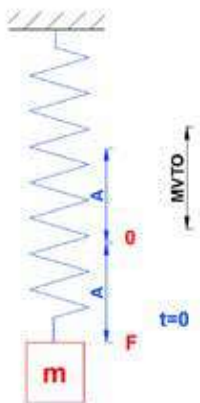


Figura 4.7. Oscilación de un resorte unido a una masa.

Datos:

$$m = 100 \text{ g} = 0,1 \text{ kg}$$

$$x_{OF} = A = 10 \text{ cm}$$

$$A = 0,10 \text{ m}$$

$$T = 2 \text{ s}$$

**Resolución a:**

$$v_{\text{máx}} = w A$$

$$T = \frac{2\pi}{w} \Rightarrow w = \frac{2\pi}{T}$$

$$w = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ en}$$

$$v_{\text{máx}} = 0,1 (\pi)$$

$$v_{\text{máx}} = 0,314 \text{ m/s}$$

**Resolución b:**

$$t = 0 \rightarrow x = A$$

$$\text{sen} \theta_0 = \frac{x}{A} = \frac{A}{A}$$

$$\theta_0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$x = A \text{ sen} (wt + \theta_0) = 0,10 \text{ sen} \left( \pi \cdot t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0,10 \pi \cos \left( \pi \cdot t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0,10 \pi^2 \text{ sen} \left( \pi \cdot t - \frac{\pi}{2} \right) = -w^2 x$$

$$x = 5 \text{ cm} \Rightarrow a = -\pi^2 (0,05 \text{ m}) \Rightarrow a = -0,49 \text{ m/s}^2$$

**Resolución c:**

$$\frac{0,05}{0,1} = \text{sen} \left( \pi t - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \pi t - \frac{\pi}{2} = \text{sen}^{-1} (0,5)$$

$$t = 0,67 \text{ s}$$

**Ejercicio 4.1.17.** El período de un péndulo matemático es de 3 segundos. Determinar el período si su longitud:

a. Aumenta en un 40 %

b. Disminuye en un 40 %

Datos:

$$v_{\text{máx}} = w A$$

$$T = 3 \text{ s}$$

$$\text{a) } L' = L_0 + 40 \% L_0$$

$$\text{b) } L'' = L_0 - 40 \% L_0$$

**Resolución a:**

$$T^2 = \left( 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g}} \right)^2 \Rightarrow L_0 = \frac{g \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$L_0 = \frac{9,8(3)^2}{4\pi^2} = L_0 = 2,234 \text{ m}$$

$$L' = 2,234 + 0,4(2,234)$$

$$L' = 3,128 \text{ m} \Rightarrow$$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{L'}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{3,128}{9,8}} \Rightarrow$$

$$T' = 3,55 \text{ s}$$

**Resolución b:**

$$L'' = 2,234 - 0,4(2,234) \Rightarrow L'' = 1,3404 \text{ m}$$

$$T'' = 2\pi \sqrt{\frac{1,3404}{9,8}} \Rightarrow$$

$$T'' = 2,32 \text{ s}$$

**Ejercicio 4.1.18.** Una masa de 2 kg se une a un resorte y se coloca sobre una superficie lisa horizontal, se necesita una fuerza horizontal de 20 N para mantener la masa en reposo cuando se jala 0,20 m a partir de su posición de equilibrio (el origen del eje x). La masa se suelta desde el reposo con este desplazamiento inicial ( $x = 0,20 \text{ m}$ ) y subsecuentemente experimenta oscilaciones armónicas simples. Determinar:

- La constante ( $k$ ) de la fuerza del resorte.
- La frecuencia ( $f$ ) de las oscilaciones.
- La velocidad máxima de la masa.
- La aceleración máxima de la masa.
- La energía total del sistema.
- La velocidad y aceleración cuando  $x = \frac{1}{3} x_{\text{máx}}$

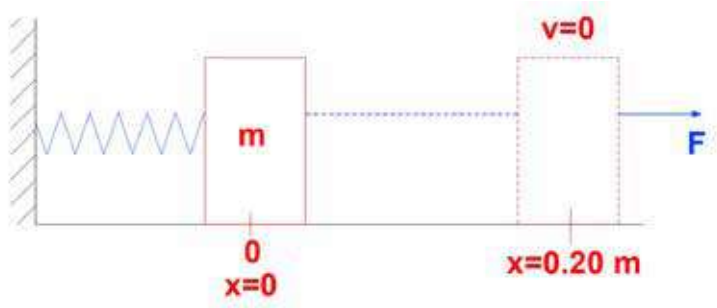


Figura 4.8. Oscilación de una masa unida a un resorte.

Datos:

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$F = 20 \text{ N}$$

$$x_{\text{máx}} = A = 0,20 \text{ m}$$

**Resolución (a):**

$$F = k x \Rightarrow$$

$$k = \frac{F}{x} = \frac{20 \text{ N}}{0,20 \text{ m}} \Rightarrow k = 100 \text{ N/m}$$

**Resolución (b):**

$$f = \frac{w}{2\pi}$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{2}} \Rightarrow w = 7,07 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f = \frac{7,07}{2\pi} \Rightarrow f = 1,125 \text{ Hz}$$

**Resolución (c):**

$$v_{\text{máx}} = w \cdot A = 7,07 \frac{\text{rad}}{\text{s}} (0,2 \text{ m}) \Rightarrow v_{\text{máx}} = 1,414 \text{ m/s}$$

**Resolución (d):**

$$a_{\text{máx}} = -w^2 A = -(7,07)^2 (0,2) \Rightarrow a_{\text{máx}} = -10 \text{ m/s}^2$$

**Resolución (e):**

$$E_{TOTAL} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (100) (0,2)^2 \Rightarrow E_{TOTAL} = 2 \text{ J}$$

**Resolución (f):**

$$x' = \frac{0,2 \text{ m}}{3} \Rightarrow x' = 0,067 \text{ m}$$

$$v' = w \sqrt{A^2 - x'^2} = 7,07 \sqrt{(0,2)^2 - (0,067)^2} \Rightarrow$$

$$v' = 1,33 \text{ m/s}$$

$$a' = -w^2 x' = -(7,07)^2 (0,067)$$

$$a' = -3,35 \text{ m/s}^2$$

**Ejercicio 4.1.19.** Una esfera sólida de 2,5 kg de masa y de 0,30 m de diámetro está suspendida en un alambre, si el momento o torque de rotación que se requiere para torcer el alambre es de  $6 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ . Determinar:

- El período de oscilación angular para pequeños desplazamientos angulares.
- La frecuencia angular ( $\omega$ ) para dicho péndulo.
- La longitud ( $L$ ) del péndulo matemático equivalente.



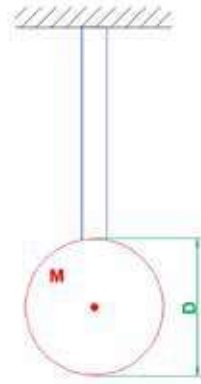


Figura 4.9. Masa suspendida de un alambre.

Datos:

$$M = 2,5 \text{ kg}$$

$$D = 0,30 \text{ m}$$

$$R = 0,15 \text{ m}$$

$$k' = 6 \times 10^{-3} \text{ Nm/rad}$$

**Resolución (a):**

Aplicamos la fórmula  $\Rightarrow$  péndulo de torsión.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k'}}$$

$$I = \frac{2}{5} MR^2 = \frac{2}{5} (2,5) (0,15)^2$$

$$I = 0,0225 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{ en}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,0225}{6 \times 10^{-3}}} \Rightarrow T = 12,17 \text{ s}$$

**Resolución (b):**

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12,17} \Rightarrow w = 0,516 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

**Resolución (c):**

$$T^2 = \left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^2 \Rightarrow L = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} \Rightarrow$$

$$L = \frac{(12,17)^2(9,8)}{4\pi^2} \Rightarrow L = 36,77 \text{ m}$$

**Ejercicio 4.1.20.** Una partícula de 0,9 kg ejecuta un M.A.S de período 0,6 s y amplitud 40 cm.

- ¿Cuál es la constante  $k$ ?
- La energía total del movimiento.
- Las energías potencial y cinética cuando la elongación es igual a la mitad de la amplitud.

Datos:

$$m = 0,9 \text{ kg}$$

$$T = 0,6 \text{ s}$$

$$A = 0,4 \text{ m}$$

**Resolución (a):**

$$k = mw^2$$

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,6} \Rightarrow w = 3,33\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ en}$$

$$k = 0,9(3,33\pi)^2 \Rightarrow k = 10\pi^2 \text{ N/m}$$

**Resolución (b):**

$$E_{TOTAL} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(10\pi)^2(0,20)^2 \Rightarrow$$

$$E_{TOTAL} = 7,89 \text{ J}$$

**Resolución (c):**

$$EP = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(10\pi)^2(0,20)^2$$

$$EP = 1,97 \text{ J}$$

$$EC = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0,9)w^2(\sqrt{A^2 - x^2})^2 \Rightarrow$$

$$EC = \frac{1}{2}(0,9)(3,33\pi)^2[(0,4)^2 - (0,2)^2]$$

$$EC = 5,91 \text{ J}$$

## 4.2. Ejercicios propuestos

**Ejercicio 4.2.1.** La posición de una partícula está dada por la ecuación:  $x = 4 \cos (3\pi t + \pi)$ , donde  $x$  está en (m) y  $t$  en (s). Determinar:

- a. La frecuencia y el período del movimiento.
- b. La amplitud el movimiento.
- c. La constante de fase.
- d. La posición de la partícula en  $t = 0$  y  $t = 5$  s.
- e. La rapidez y aceleración en cualquier instante.
- f. La rapidez y aceleración en  $t = 0$  y  $t = 5$  s.

**Respuestas:**

- a. 1,5 Hz; 0,667 s
- b. 4 m
- c.  $\pi$  rad
- d. -4 m

**Ejercicio 4.2.2.** La posición de una partícula está dada por la ecuación:  $x = 8 \cos (2t + \pi/3)$ , donde  $x$  está en (cm) y  $t$  en (s). Determinar:

- a. La frecuencia y el período del movimiento.
- b. La amplitud el movimiento.
- c. La constante de fase.
- d. La posición, la rapidez y aceleración de la partícula en  $t = \pi/2$
- e. La máxima rapidez y el tiempo más corto en alcanzarla.
- f. La máxima aceleración y el tiempo más corto en alcanzarla.

**Respuestas:**

- a. 13,9 cm/s

- b.  $16 \text{ cm/s}^2$
- c.  $16 \text{ cm/s}$ ;  $0,263 \text{ s}$
- d.  $32 \text{ cm/s}^2$ ;  $1,05 \text{ s}$ .

**Ejercicio 4.2.3.** Un pistón de masa  $2 \text{ kg}$  de un motor de automóvil tiene un M.A.S. con una amplitud de  $5 \text{ cm}$ . Calcular la rapidez y la aceleración máximas del pistón cuando se mueve a  $3600 \text{ rev/min}$ .

Un péndulo simple tiene un período de  $2,5 \text{ s}$ . Calcular:

- a. Su longitud
- b. Su período si estuviera en la luna donde  $g = 1,67 \text{ m/s}^2$

**Respuestas:**      a)  $1,55 \text{ m}$       b)  $6,1 \text{ s}$

**Ejercicio 4.2.4.** Un péndulo simple que tiene una masa de  $0,25 \text{ kg}$  y una longitud de  $1 \text{ m}$ , se desvía un ángulo de  $15^\circ$  y se suelta. Calcular:

- a. La rapidez máxima.
- b. La aceleración angular máxima.
- c. La máxima fuerza de restitución.

**Respuestas:**      a)  $0,82 \text{ m/s}$       b)  $2,57 \text{ rad/s}^2$       c)  $0,64 \text{ N}$

**Ejercicio 4.2.5.** Un péndulo físico en forma de cuerpo plano tiene un M.A.S con una frecuencia de  $1,5 \text{ Hz}$ . Si tiene una masa de  $2,2 \text{ kg}$  y el pivote se encuentra a  $0,35 \text{ m}$  del centro de masa. Calcular el momento de inercia del péndulo.

**Respuesta:**       $0,085 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Ejercicio 4.2.6.** Un volante de un período de oscilación de  $0,25 \text{ s}$ . El volante se construyó de tal manera que  $20 \text{ g}$  de masa están concentrados alrededor de un aro de  $0,50 \text{ cm}$  de radio. Calcular:

- a. El momento de inercia del volante.
- b. La constante de torsión del resorte sujeto al volante.

**Respuestas:**      a)  $5 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$       b)  $3,16 \times 10^{-4} \text{ Nm/rad}$

**Ejercicio 4.2.7.** Un péndulo de longitud  $L$  y masa  $M$ , tiene conectado un resorte de constante  $k$  a una distancia  $h$  por debajo del punto de suspensión como se muestra en la Fig. 4.10. Calcular la frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de la amplitud, suponga que tanto el soporte vertical como el resorte son rígidos de masa despreciable.

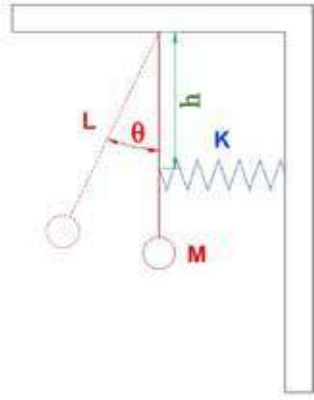


Figura 4.10. Movimiento de un péndulo conectado a un resorte.

**Respuesta:** 
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{MgL + kh^2}{ML^2}}$$

**Ejercicio 4.2.8.** Una partícula que oscila armónicamente toma un segundo para pasar por dos puntos de su trayectoria con la misma velocidad, los mismos que se encuentran separados 20 cm. En 2 s más vuelve a pasar de regreso por el segundo punto. Calcular el período y la amplitud del movimiento.

**Respuestas:**  $T = 6s$  y  $A = 20cm$

**Ejercicio 4.2.9.** Determinar la ecuación del movimiento de la proyección (posición) sobre un diámetro de un punto que describe una circunferencia de 35 cm de radio, sabiendo que al comenzar el movimiento la proyección incide en los  $4/5$  del radio respecto al centro, y luego 4 s su proyección en los  $3/5$  del radio. Indique también el período del MVTO.

**Respuestas:**  $x(t) = 35 \cos(0,07095 t + 0,6435)$ ; 88,6 s

**Ejercicio 4.2.10.** Una rueda de 60 cm de diámetro tiene una manigueta en su borde, la rueda gira a 0,5 rev/s con su eje en posición horizontal. Suponiendo que los rayos del sol incidan verticalmente sobre la tierra, la sombra del manubrio esta animada de movimiento armónico simple. Determinar:

- a. El período de oscilación de la sombra.
- b. Su frecuencia.
- c. Su amplitud.
- d. Escribir las ecuaciones que expresan la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo Suponer la fase inicial cero.

**Respuestas:**

- a. 2 s
- b. 0,5 Hz
- c. 0,30 m
- d.  $x = 0,3 \sin(\pi t)$  [m]

**Ejercicio 4.2.11.** Un cuerpo ejecuta un M.A.S con una amplitud de 20 cm y un período de 3 s. Si la posición máxima ocurre en  $t = 0$ .

- a. ¿Cuál será la posición 0,5 s más tarde?
- b. ¿Cuáles serán las velocidades y aceleración en ese mismo instante?

**Respuestas:**      a) 10cm      b)  $-36,2 \text{ cm/s}$ ;  $-43,85 \text{ cm/s}^2$

**Ejercicio 4.2.12.** Un cuerpo que ejecuta un M.A.S tiene una aceleración máxima igual a  $4 \text{ m/s}^2$  cuando la amplitud es 0,25 m. ¿Cuál es el período del MVTO. y su máxima velocidad?

**Respuestas:**       $\approx 1,57 \text{ s}$ ;  $1 \text{ m/s}$

**Ejercicio 4.2.13.** Un cuerpo ejecuta un M.A.S de acuerdo a :  $x = 0,5 \cos \frac{\pi}{3} t$  Determinar:

- a. La elongación.
- b. La velocidad.
- c. La aceleración para  $t = 2 \text{ s}$ .
- d. Identifique la frecuencia y el período del movimiento.

**Respuestas:**

- a) 0,25m      b)  $-0,453 \text{ m/s}$       c)  $0,274 \text{ m/s}^2$       d)  $\frac{1}{6} \text{ Hz}$ ; 6 s

**Ejercicio 4.2.14.** Una partícula esta animada de M.A.S con una amplitud de 10 cm y un período de 2 s. Completar la tabla de valores siguiente, de la elongación, la velocidad y la aceleración en los instantes indicados en la tabla. Construir después las gráficas de  $x$ ,  $v$ ,  $a$  vs  $t$ .

| t(s)                  | 0 | $\frac{T}{8}$ | $\frac{T}{4}$ | $\frac{3T}{8}$ | $\frac{T}{2}$ | $\frac{5T}{8}$ | $\frac{3T}{4}$ | $\frac{7T}{8}$ | T |
|-----------------------|---|---------------|---------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|---|
| x (m)                 |   |               |               |                |               |                |                |                |   |
| v (m/s)               |   |               |               |                |               |                |                |                |   |
| a (m/s <sup>2</sup> ) |   |               |               |                |               |                |                |                |   |

**Ejercicio 4.2.15.** Determinar en cada uno de los instantes señalados en el problema anterior los valores de la energía cinética ( $E_c$ ) y de la potencial ( $E_p$ ) si el cuerpo tiene una masa de 5 kg, para cada instante sumar las dos energías. ¿Qué conclusión puede manifestar?

| t(s)          | 0 | $\frac{t}{8}$ | $\frac{t}{4}$ | $\frac{3t}{8}$ | $\frac{t}{2}$ | $\frac{5t}{8}$ | $\frac{3t}{4}$ | $\frac{7t}{8}$ | t |
|---------------|---|---------------|---------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|---|
| $E_c$ (J)     |   |               |               |                |               |                |                |                |   |
| $E_p$ (J)     |   |               |               |                |               |                |                |                |   |
| $E_c+E_p$ (J) |   |               |               |                |               |                |                |                |   |

**Ejercicio 4.2.16.** Determine qué fracción de energía total es cinética y que fracción es potencial en un M.A.S cuando la elongación es:

- Cero.
- $\frac{1}{4}$  de la amplitud.
- $\frac{1}{2}$  de la amplitud.
- $\frac{3}{4}$  de la amplitud.
- Igual a la amplitud.

**Respuestas:**

- a. Elongación  $x = 0$ :

$$\frac{E_k}{E} = 1, \quad \frac{E_p}{E} = 0$$

- b. Elongación  $x = \frac{1}{4}A$ :

$$\frac{E_k}{E} = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}, \quad \frac{E_p}{E} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

c. Elongación  $x = \frac{1}{2}A$ :

$$\frac{E_k}{E} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, \quad \frac{E_p}{E} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

d. Elongación  $x = \frac{3}{4}A$ :

$$\frac{E_k}{E} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}, \quad \frac{E_p}{E} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

e. Elongación  $x = A$ :

$$\frac{E_k}{E} = 0, \quad \frac{E_p}{E} = 1$$

**Ejercicio 4.2.17.** Una partícula animada de M.A.S con una amplitud igual a 1,5 cm vibra 100 veces por segundo. Determinar:

- Su velocidad
- Su aceleración
- Su fase, cuando su desplazamiento es de 0,75 cm, considérese sus distintas alternativas.

**Respuestas:**

- 8,17 m/s
- $\approx -2960,88 \text{ m/s}^2$
- $\pm \frac{\pi}{3}$

**Ejercicio 4.2.18.** Una partícula situada en el extremo de un diapasón pasa por la posición de equilibrio con una velocidad de 188,4 cm/s. Si la amplitud es de 1 mm, ¿Cuál es la frecuencia y el período del diapasón?

**Respuestas:** 299,8 Hz;  $3,335 \times 10^{-3} \text{ s}$

**Ejercicio 4.2.19.** Una partícula de una cuerda vibrante vibra con un M.A.S de 3 mm de amplitud. Su aceleración en los extremos de la trayectoria es de  $78,96 \text{ m/s}^2$ . Calcular la frecuencia y la velocidad cuando atraviesa la posición de equilibrio y cuando su elongación es de 1,2 mm.

**Respuestas:**  $f \approx 25,83 \text{ Hz}$ ;  $v_{\text{máx}} = 0,487 \text{ m/s}$ ;  $v(x = 1,2 \text{ mm}) \approx 0,446 \text{ m/s}$



**Ejercicio 4.2.20.** *Un cuerpo vibra con una frecuencia de 100 Hz y una amplitud de 3mm. Calcular su velocidad y su aceleración en el centro y en los extremos de su trayectoria.*

**Respuestas:** Centro:  $1,885\text{ m/s}$  y Extremos:  $0,1184\text{ m/s}^2$

**Ejercicio 4.2.21.** *¿Cuánto debe variarse la longitud de un péndulo matemático para determinar un 20 % de su período?*

**Respuesta:** Se debe aumentar la longitud en un 44 % para aumentar el período en un 20 %.

**Ejercicio 4.2.22.** *Si un péndulo diseñado para batir segundos en un lugar donde  $g = 9,8\text{ m/s}^2$ . Se hace un 1 mm más largo de lo debido. ¿Qué atraso experimentará en un día el reloj al cual está unido?*

**Respuesta:** 172,8 s

**Ejercicio 4.2.23.** *El reloj de péndulo de Jean Richier experimentó un atraso de 2,5 min por día en Guayana. Si en París  $g = 9,8\text{ m/s}^2$ , ¿Cuál es el valor de la gravedad en Guayana?*

**Respuesta:**  $\approx 9,766\text{ m/s}^2$

**Ejercicio 4.2.24.** *Un péndulo simple cuya longitud es 1 m y cuya masa es 6 kg se separa 4 cm de la vertical. Calcular la fuerza de restitución, su aceleración y la tensión en el hilo en el punto de partida.*

**Respuestas:** 3,5 N;  $0,392\text{ m/s}^2$ ; 58,8 N

**Ejercicio 4.2.25.** *Un oscilador armónico simple es descrito por la ecuación  $x = 4\text{ sen } (0,1t + 0,5)\text{ [m]}$  y  $t$  (en s). Determinar:*

- a. *La amplitud, el período, la frecuencia y la fase inicial del movimiento.*
- b. *La velocidad y la aceleración.*
- c. *Las condiciones iniciales.*
- d. *La posición, velocidad y aceleración para  $t = 5\text{ s}$ .*

*Haga los gráficos de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.*

**Respuestas:**

a. 4 m;  $20\pi\text{ s}$ ;  $0,05/\pi\text{ [Hz]}$ ; 0,5 rad

b.  $v = 0,4\text{ cos } (0,1t + 0,5)\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $a = -0,04\text{ sen } (0,1t + 0,5)\text{ [m} \cdot \text{s}^{-2}]$

c.  $1,92 \text{ m}$ ;  $0,351 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $-0,02 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

d.  $3,36 \text{ m}$ ;  $0,216 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $-0,03 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

**Ejercicio 4.2.26.** Una partícula se mueve con M.A.S con amplitud de  $1,5 \text{ m}$  y frecuencia de  $100$  ciclos por segundo. ¿Cuál es su frecuencia angular? y determinar:

a. Su velocidad.

b. Su aceleración.

c. Su fase, cuando su desplazamiento es de  $0,75 \text{ m}$ .

**Respuestas:**

a.  $2 \times 10^2 \pi \text{ Hz}$ ;  $2,6 \times 10^2 \pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

b.  $3,4 \times 10^4 \pi^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

c.  $30^\circ$

**Ejercicio 4.2.27.** Un M.A.S tiene una amplitud de  $8 \text{ cm}$  y un período de  $4 \text{ s}$ . Calcular la velocidad y la aceleración  $0,5 \text{ s}$  después que la partícula pase por el extremo de la trayectoria.

**Respuestas:**

$2,8 \pi \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$1,4 \pi^2 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Ambas hacia el centro.

**Ejercicio 4.2.28.** Cuando un hombre de  $60 \text{ kg}$  se introduce en un auto, el centro de gravedad del auto baja  $0,3 \text{ cm}$ . ¿Cuál es la constante elástica de los muelles del auto? Suponiendo que la masa del auto es de  $500 \text{ kg}$ . ¿Cuál es su período de vibración cuando está vacío y cuando el hombre está dentro?

**Respuestas:**  $\approx 196200 \text{ N/m}$ ;  $T_{\text{vacío}} \approx 0,317 \text{ s}$ ;  $T_{\text{con hombre}} \approx 0,335 \text{ s}$

**Ejercicio 4.2.29.** Un bloque de madera cuya densidad con respecto al agua es  $\rho$  tiene dimensiones  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Mientras está flotando en el agua con el lado “ $a$ ” en la posición vertical, se empuja hacia abajo y se suelta. Encontrar el período de la oscilación resultante.

**Respuestas:**

$$2\pi\sqrt{\frac{\rho a}{g}}$$

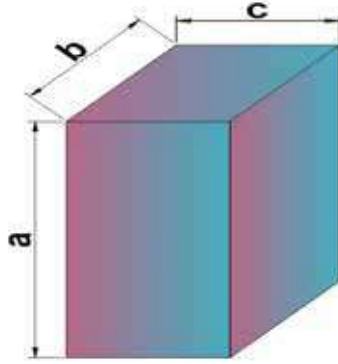


Figura 4.11. Dimensiones del bloque de madera.

**Ejercicio 4.2.30.** El período de un péndulo es de 3 s. ¿Cuál será su período?, si su longitud:

- a. Aumenta
- b. Disminuye en un 60 %

**Respuestas:**

- a.  $T_2 > 3 \text{ s}$
- b.  $T_2 \approx 1,90 \text{ s}$

**Ejercicio 4.2.31.** El péndulo de un reloj tiene un período de 2 s cuando  $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Si su longitud se aumenta en 1 mm. ¿Cuánto se abra atrasado el reloj después de 24 horas?

**Respuesta:**  $\approx 34,56 \text{ s}$

**Ejercicio 4.2.32.** Un cuerpo de 4 kg extiende a un resorte de 16 cm. A partir de su posición relajada. Se quita el cuerpo y del mismo resorte se cuelga otro de 0,50 kg. Si entonces se estira el resorte y después se le suelta, ¿Cuál es el período de oscilación?

**Respuesta:**  $0,28 \text{ s}$

**Ejercicio 4.2.33.** Una masa de 2 kg cuelga de un resorte. Un cuerpo de 300 g se cuelga debajo de la masa y el resorte se estira 2 cm más que antes. Encontrar el período del movimiento si se quita el cuerpo de 300 g y se hace oscilar a la masa.

**Respuesta:** 0,73 s

**Ejercicio 4.2.34.** *Un cuerpo pequeño de 0,10 kg de masa, está efectuando un movimiento armónico simple con una amplitud de 1 m y un período de 0,20 s.*

- a. *¿Cuál es el valor máximo de la fuerza que obra sobre él?*
- b. *Si las oscilaciones son producidas mediante un resorte ¿Cuál es la constante de fuerza del resorte?*

**Respuestas:**

- a. 98,69 N
- b. 98,69 N/m

**Ejercicio 4.2.35.** *Un cuerpo oscila con movimiento armónico simple de acuerdo con la ecuación:*

$$x = 6 \cos (3\pi t + \pi/3)$$

*En donde  $t$  (s) y  $x$  (m) y los números dentro del paréntesis en radianes. Calcular:*

- a. *La elongación.*
- b. *La velocidad.*
- c. *La aceleración para el tiempo  $t = 2$  s.*
- d. *La fase.*
- e. *La frecuencia.*
- f. *El período del movimiento.*

**Respuestas:**

- a. 3 m
- b. -49 m/s
- c. -270 m/s<sup>2</sup>
- d. 20 rad
- e. 1,5 Hz

f. 0,67 s

**Ejercicio 4.2.36.** Una partícula efectúa un movimiento armónico lineal alrededor del punto  $x = 0$  en  $t = 0$ , tiene una elongación  $x = 0,37$  cm y una velocidad cero. Si la frecuencia del movimiento es de 0,25 Hz. Determinar:

- a. El período.
- b. La frecuencia angular.
- c. La amplitud.
- d. La elongación para un tiempo  $t$  (arbitrario).
- e. La velocidad para el tiempo  $t$  (arbitrario).
- f. La rapidez máxima.
- g. La aceleración máxima.
- h. La elongación para  $t = 3$  s.
- i. La velocidad para  $t = 3$  s.

**Respuestas:**

- a. 4 s
- b.  $\pi/2$  rad
- c. 0,37 cm
- d.  $0,37 \cos(\pi t/2)$  cm
- e.  $-0,58 \sin(\pi t/2)$  cm
- f. 0,58 cm
- g.  $0,91 \text{ cm/s}^2$
- h. cero
- i. 0,58 cm/s

**Ejercicio 4.2.37.** *Dos partículas ejecutan M.A.S de la misma amplitud y frecuencia sobre la misma línea recta. Se cruzan una con otra cuando se están moviendo en sentido opuesto cada vez que su elongación es la mitad de su amplitud. ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas?*

**Respuesta:**  $\frac{\pi}{3}$

**Ejercicio 4.2.38.** *Un bloque se encuentra en una superficie horizontal que se está moviendo horizontalmente con un M.A.S de frecuencia 2 Hz. EL coeficiente de rozamiento estático entre la superficie y el bloque es de 0,50. ¿Cuál es el valor de la amplitud si el bloque no resbala por la superficie?*

**Respuesta:** 3,1cm

**Ejercicio 4.2.39.** *Un oscilador armónico simple es descrito por la siguiente ecuación:  $x = 4 \sin (0,1t + 0,5)$  donde  $t$  (s) y  $x$  (m). Determinar:*

- La amplitud, el período, la frecuencia y la fase inicial del movimiento.*
- La velocidad y la aceleración.*
- Las condiciones iniciales.*
- La posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.*

**Respuestas:** [4], [5], [6], [7]:

- 4 m;  $20\pi$  s;  $0,05/\pi$  Hz; 0,5 rad
- $v = 0,4 \cos (0,1t + 0,5)$  m/s;  $a = -0,04 \sin (0,1t + 0,5)$  m/s<sup>2</sup>
- 1,92 m; 0,351 m/s;  $-0,02$  m/s<sup>2</sup>
- 3,36 m; 0,216 m/s;  $-0,03$  m/s<sup>2</sup>

## Bibliografía

- [1] D. Barba M and B. Barba, *Física. Fundamentos teórico - prácticos para ciencias e ingenierías*. La Caracola Editores, 2022. [Online]. Available: <http://cimogsys.esPOCH.edu.ec/direccion-publicaciones/public/docs/books/2022-04-11-135829-F%C3%ADsica%20fundamentos.pdf>
- [2] D. Barba Maggi and B. Barba, *Física. Fundamentos teórico - prácticos de Cinemática, Estática y Dinámica para ciencias e ingenierías*. La Caracola Editores, 2023. [Online]. Available: [http://cimogsys.esPOCH.edu.ec/direccion-publicaciones/public/docs/books/2023-11-07-210053-fisica\\_fundamentos.pdf](http://cimogsys.esPOCH.edu.ec/direccion-publicaciones/public/docs/books/2023-11-07-210053-fisica_fundamentos.pdf)
- [3] D. Barba M and B. Barba, *Física. Fundamentos teórico - prácticos de trabajo, potencia, energía y cantidad de movimiento lineal para ciencias e ingenierías*. La Caracola Editores, 2025. [Online]. Available: [http://cimogsys.esPOCH.edu.ec/direccion-publicaciones/public/docs/books/2025-03-07-132239-F%C3%ADsica.%20Fundamentos%20te%C3%B3rico-pr%C3%A1cticos%20de%20trabajo,%20potencia,%20energ%C3%ADa%20y%20cantidad%20de%20movimiento\\_compressed.pdf](http://cimogsys.esPOCH.edu.ec/direccion-publicaciones/public/docs/books/2025-03-07-132239-F%C3%ADsica.%20Fundamentos%20te%C3%B3rico-pr%C3%A1cticos%20de%20trabajo,%20potencia,%20energ%C3%ADa%20y%20cantidad%20de%20movimiento_compressed.pdf)
- [4] M. Alonso and O. Rojo, *Física: mecánica y termodinámica*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1986. [Online]. Available: <https://books.google.com.ec/books?id=McPUJwAACAAJ>
- [5] R. Serway, *Física para ciencias e ingeniería: Volumen 1*. CENGAGE Learning, 2018. [Online]. Available: <https://books.google.com.ec/books?id=jj9HyQEACAAJ>
- [6] J. McKelvey and H. Grotch, *Física para ciencias e ingeniería*, ser. Física para

ciencias e ingeniería. Harla, Harper & Row Latinoamericana, 1981. [Online]. Available: <https://books.google.com.ec/books?id=CiIKfAEACAAJ>

- [7] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker, *Fundamentals of Physics, Volume 1*. Wiley, 2017. [Online]. Available: <https://books.google.com.ec/books?id=4iqVDwAAQBAJ>

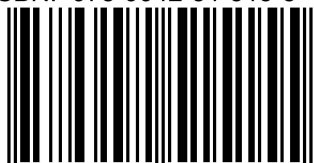


El libro de Física que presentamos está dirigido a lectores que ya han completado al menos un año en carreras de ciencias e ingeniería y a profesionales de carreras técnicas como un documento de consulta. Está dividido en cuatro capítulos que se centran en el estudio de la dinámica rotacional y el movimiento oscilatorio, con un enfoque tanto teórico como práctico. Se incluye una amplia gama de ejercicios resueltos y propuestos para reforzar el aprendizaje. Invitamos a los lectores a revisar las obras anteriores para mantener una secuencia lógica y facilitar su comprensión.

**Diego Guillermo Barba Maggi.** Nacido en Riobamba, Ecuador, en 1980. Experto en Procesos *e-learning* por la Fundación FATLA, ingeniero mecánico recibido de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, magister en Docencia y Currículo para la Educación Superior en la Universidad Técnica de Ambato y doctor de la Universidad de Buenos Aires, Área Ingeniería, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, Argentina, con tesis calificada sobresaliente. Autor de varias publicaciones en revistas indexadas y libros de Física. Actualmente director del Grupo de investigación GIICT - ESPOCH y docente investigador de la ESPOCH.

**Bernardo Ezequiel Barba Barba.** Nacido en Colta, Ecuador, en 1957. Especialista en Computación Aplicada al Ejercicio Docente e ingeniero mecánico recibido de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, magister en Docencia y Currículo para la Educación Superior en la Universidad Técnica de Ambato. Docente investigador de la ESPOCH durante 37 años, mejor egresado de la carrera de Ingeniería Mecánica en el año 1980 y autor de libros de Física. Actualmente, director de ACIBAG "Asesoría en Ciencia Básicas a nivel general", profesor asesor de Física y de nivelación preuniversitaria.

ISBN: 978-9942-51-515-5



9 789942 515155

